Målepunkt

Riemannsk Geometri – E08

Jakob Lindblad Blaavand
2005 3675

27. oktober 2008

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

1 indledning

Det komplekse vektorrum $\mathbb{C}^{n+1}$ identificeres med $\mathbb{R}^{2n+2}$ via $z = (z^0, \ldots, z^n)$ identificeres med $(x^0, y^0, x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$, hvor $z^j = x^j + iy^j$. Det komplekse projektive rum defineres som kvotientrummet af $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ for ækvivalensrelationen $z \sim z'$ hvis der findes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sådan at $z' = cz$. Ækvivalensklasserne betegnes $[z^0, \ldots, z^n]$.

2 Opgaver

Opgave 1.(a)

Lad $M(n+1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{(n+1)^2}$ betegne mængden af kvadratiske $(n+1)$ matricer med komplekse indgange, og lad $P : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to M(n+1, \mathbb{C})$ betegne afbildningen $P(z) = (zz^*)/(z^*z)$, hvor $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ er en søjlevektor, og $z^* = \bar{z}^t$. Specielt identificeres 1×1-matricen z^*z med $\|z\|^2$. Vis, at P er en homeomorfi af $\mathbb{C}P^n$ til billedet af P, og at $\mathbb{C}P^n$ er et kompakt Hausdorff rum med tællelig basis.

Bevis. Først og fremmest er $P : \mathbb{C}P^n \to M(n+1, \mathbb{C})$ veldefineret, da $P([cz]) = czz^*c^*/|c|^2 \|z\|^2 = zz^*/\|z\|^2$
$= P([z])$, hvor $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

For at vise, at vise, at P er en homeomorfi af $\mathbb{C}P^n$ til billedet af P og at $\mathbb{C}P^n$ er et kompakt Hausdorff rum med tællelig basis bruges Korollar 6.9 fra [Dupont and Madsen(2007)]. Dette korollar siger, at hvis X og Y er to topologiske rum, med X kompakt og Y Hausdorff, og $f : X \to Y$ er en kontinuert, injektiv afbildning, så er $f : X \to f(X)$ en homeomorfi, hvor $f(X)$ har sportopologien i Y.

For at kunne bruge dette korollar, med $X = \mathbb{C}P^n$ og $Y = M(n+1, \mathbb{C})$, skal vi vide at $M(n+1, \mathbb{C})$ er Hausdorff, men da $M(n+1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{(n+1)^2} \cong \mathbb{R}^{2(n+1)^2}$ er $M(n+1, \mathbb{C})$ Hausdorff fordi $\mathbb{R}^m$ er det for alle naturlige tal m. Vi skal også vide, at P er kontinuert og injektiv. Men Lemma 5.12 fra [Dupont and Madsen(2007)] giver, at $P : \mathbb{C}P^n \to M(n+1, \mathbb{C})$ er kontinuert hvis og kun hvis $P \circ \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to M(n+1, \mathbb{C})$ er kontinuert, hvor $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ er kvotientafbildningen, $z \mapsto [z]$. $P \circ \pi(z) = zz^*/z^*z$, og da zz^* er kontinuert som funktion af z (hver indgang i matricen er blot monomielle udtryk i koordinaterne af z), og $1/\|z\|^2$ er kontinuert som funktion af z, da $z \neq 0$, så er P kontinuert.

P er ligeledes injektiv, fordi antag at $P(z_1) = P(z_2)$ for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, så er $z_1 z_1^*/\|z_1\|^2 = z_2 z_2^*/\|z_2\|^2$, og ganges nu med z_1 på hver side, så fås at

$$z_1 = \frac{z_1 z_1^* z_1}{\|z_1\|^2} = z_2 \frac{z_2^* z_1}{\|z_2\|^2}. \tag{1}$$

$\frac{z_2^* z_1}{\|z_2\|^2} \in \mathbb{C}$, og hvis $\frac{z_2^* z_1}{\|z_2\|^2} = 0$ er $z_1 = 0$ pr. (1), hvilket vi antog at den ikke var. Derfor er $\frac{z_2^* z_1}{\|z_2\|^2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hvormed $z_1 \sim z_2$ og P er injektiv som afbildning fra $\mathbb{C}P^n$ til $M(n+1, \mathbb{C})$.

Det eneste der nu mangler er, at $\mathbb{C}P^n$ skal være kompakt. Hvis $\mathbb{C}P^n$ er billedet af et kompakt rum under en kontinuert afbildning, er $\mathbb{C}P^n$ kompakt (sætning 6.7 [Dupont and Madsen(2007)]). Den kontinuerte afbildning der skal bruges er kvotient afbildningen $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$. Denne er kontinuert pr. definitionen af kvotienttopologien på $\mathbb{C}P^n$. Hvis vi restringerer denne kvotientafbildning til sfæren $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ der er kompakt (en lukket og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^{2n+2}$), og det kan vises at $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ er surjektiv, så er $\mathbb{C}P^n$ kompakt. $\pi|_{S^{2n+1}}$ er surjektiv, hvis der i hver ækvivalensklasse i $\mathbb{C}P^n$ findes et element der har norm 1. Lad derfor $[z^0, \ldots, z^n] \in \mathbb{C}P^n$ være givet. $z = (z^0, \ldots, z^n) \simeq (x^0, y^0, \ldots, x^n, y^n)$ er ækvivalent til $(x^0, y^0, \ldots, x^n, y^n)/\sqrt{\sum_i (x^i)^2 + (y^i)^2} \in S^{2n+1}$. Dermed findes der i hver ækvivalensklasse et element i S^{2n+1}. Dermed er $\pi|_{S^{2n+1}}$ surjektiv, og $\mathbb{C}P^n$ kompakt.

Nu er alle forudsætninger i Korollar 6.9 opfyldt, og $P : \mathbb{C}P^n \to P(\mathbb{C}P^n) \subset M(n+1, \mathbb{C})$ er en homeomorfi, når $P(\mathbb{C}P^n)$ udstyres med sportopologien.

Da vi nu har en homeomorfi mellem $\mathbb{C}P^n$ og $P(\mathbb{C}P^n)$ har de to mængder samme topologiske egneskaber. Det betyder specielt, at da $P(\mathbb{C}P^n)$ er Hausdorff og har tællelig basis – den er jo udstyret med sportopologien, og sportopologien arver disse topologiske egenskaber fra $M(n+1, \mathbb{C})$ – så er $\mathbb{C}P^n$ også Hausdorff og har tællelig basis. Dermed er det ønskede vist.

$\square$

Opgave 1.(b)

Vis, at $\mathbb{C}P^n$ er en glat mangfoldighed med kort givet ved $(U_i, w_i), i = 0, \ldots, n$, hvor

$$U_i = \{[z^0, \ldots, z^n] : z^i \neq 0\} \quad w_i([z]) = \left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right),$$

og at P er en indlejring.

Bevis. Hvis vi skal vise, at (U_i, w_i) er et kort, skal vi først være sikre på, at w_i er veldefineret. Men lad $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, og lad $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, da er $cz = (cz^0, \ldots, cz^n)$, og derfor er

$$w_i([cz]) = \left(\frac{cz^0}{cz^i}, \ldots, \frac{cz^{i-1}}{cz^i}, \frac{cz^{i+1}}{cz^i}, \ldots, \frac{cz^n}{cz^i}\right) = \left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right) = w_i([z]),$$

hvormed w_i er veldefineret.

Dernæst skal det ses, at $U_i \subset \mathbb{C}P^n$ er åben. Pr. definition af kvotienttopologien på $\mathbb{C}P^n$ er U_i åben hvis og kun hvis $\pi^{-1}(U_i)$ er åben i $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, hvor π er kvotientafbildningen fra ovenstående opgave.

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(U_i) &= \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : \pi(z) \in U_i\} \\
&= \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : (\pi(z))^i \neq 0\} \\
&= \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : z^i \neq 0\},
\end{aligned}$$

hvor sidste mængde er åben i $\mathbb{C}^{n+1}$ og dermed åben i $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Mængden er åben i $\mathbb{C}^{n+1}$ fordi det er komplementet til planen i $\mathbb{C}^{n+1}$ hvor $z^i = 0$, og planen er lukket. Dermed er U_i'erne åbne mængder i $\mathbb{C}P^n$. Tilmed er det klart, at U_i'erne overdækker $\mathbb{C}P^n$.

Til at vise, at w_i er en homeomorfi, bruges Lemma 5.12 fra [Dupont and Madsen(2007)]. Dette lemma giver, at $w_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ er kontinuert hvis og kun hvis $w_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}^n$ er kontinuert.

For $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, hvor $z^i \neq 0$ er

$$w_i \circ \pi(z) = \left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right)$$

klart kontinuert, og derfor er w_i altså også kontinuert. Den inverse til w_i er givet ved $w_i^{-1}(z^0, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^n) = [z^0, \ldots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \ldots, z^n]$ fordi det ses ved sammensætning at $w_i \circ w_i^{-1} = id$ og $w_i^{-1} \circ w_i = id$:

$$
\begin{aligned}
w_i \circ w_i^{-1}(z^0, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^n) &= w_i([z^0, \ldots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \ldots, z^n]) \\
&= (z^0, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^n). \\
w_i^{-1} \circ w_i([z^0, \ldots, z^n]) &= w_i^{-1}\left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right) \\
&= \left[\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, 1, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right] \\
&= \left[\frac{z^0 z^i}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1} z^i}{z^i}, z^i, \frac{z^{i+1} z^i}{z^i}, \ldots, \frac{z^n z^i}{z^i}\right] \\
&= [z^0, \ldots, z^n].
\end{aligned}
$$

At w_i^{-1} er kontinuert, kan ses ved at betragte den kontinuerte afbildning $W_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$, givet ved $(z^0, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^n) \mapsto (z^0, \ldots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \ldots, z^n)$. $w_i^{-1} = W_i \circ \pi$, og da W_i og π er kontinuerte afbildninger er w_i^{-1} også kontinuert, pr. sammensætning af kontinuerte afbildninger. Dermed er w_i en homeomorfi.

For at (U_i, w_i) er et kort, skal $w_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. Men hvis $\mathbb{C}^n$ identificeres med det affine underrum af $\mathbb{C}^{n+1}$, hvor $z^i = 1$, så kan $w_i([z])$ ses som punktet hvor linjen $w_i([z])$ ($[z]$ betegner en linje gennem origo i det komplekse rum $\mathbb{C}^{n+1}$), skærer det affine underrum. Dermed er $w_i(U_i) = \mathbb{C}^n$, og $w_i(U_i)$ er en åben mængde i $\mathbb{C}^n$. Dermed er (w_i, U_i) et kort.

Det sidste der mangler for at kortene (U_i, w_i) definerer en differentiable struktur på $\mathbb{C}P^n$ er, at de skal have glat overlap. Lad derfor (U_i, w_i) og (U_j, w_j) være to kort, hvor $i \neq j$.

$$
w_i \circ w_j^{-1} : w_j(U_i \cap U_j) \to w_i(U_i \cap U_j),
$$

hvor $w_j(U_i \cap U_j)$ og $w_i(U_i \cap U_j)$ er åbne mængder i $\mathbb{C}^n$ da w_j og w_i er homeomorfier til en åben mængde i $\mathbb{C}^n$ og U_i og U_j er åbne i $\mathbb{C}P^n$.

$$
\begin{aligned}
w_i \circ w_j^{-1}(z^0, \ldots, z^{j-1}, z^{j+1}, \ldots, z^n) &= w_i(z^0, \ldots, z^{j-1}, 1, z^{j+1}, \ldots, z^n) \\
&= \left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^{j-1}}{z^i}, \frac{1}{z^i}, \frac{z^{j+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right).
\end{aligned}
$$

Da $z^i \neq 0$ for $z \in w_j(U_i \cap U_j)$ er $w_i \circ w_j^{-1}$ klart differentiabel. På tilsvarende vis, ses det at $w_j \circ w_i^{-1} : w_i(U_i \cap U_j) \to w_j(U_i \cap U_j)$ er differentiabel. Hvis vi derfor lader atlasset til $\mathbb{C}P^n$ være alle (U_i, w_i), $i = 0, \ldots, n$, så er $\mathbb{C}P^n$ en differentiabel mangfoldighed. Faktisk er overlappene ikke blot glatte, men også holomorfe. Dermed gør det $\mathbb{C}P^n$ til en kompleks mangfoldighed.

Vi skal nu se, at ikke nok med at $\mathbb{C}P^n$ er en glat mangfoldighed i sig selv, så er det faktisk også en indlejret delmangfoldighed af $M(n+1, \mathbb{C})$. Det bliver $\mathbb{C}P^n$ netop hvis P er en indlejring.

P er en indlejring, hvis P er en immersion og en homeomorfi til billedet af P, hvor billedet af P er givet sportopologien. Det er netop vist, at P er en homeomorfi, så tilbage er at vise, at P er en immersion. For at P er en immersion, skal $P_* : T_q\mathbb{C}P^n \to T_{P(q)}M(n+1, \mathbb{C})$ være injektiv for alle $q \in \mathbb{C}P^n$. Med andre ord skal jacobianten af $id \circ P \circ w_i^{-1} : w(U_i) \to M(n+1, \mathbb{C})$ være injektiv i alle punkter $q \in U_i$ og for alle i. På $M(n+1, \mathbb{C})$ er der blot valgt identitetskortet, og derfor undlades dette at skrives i det efterfølgende. Det er naturligvis nok at vise, at jacobianten er injektiv for $i = 0$, for det følgende argument virker, med mindre ændringer, for alle andre i.

Lad $z \in w_0(U_0)$. Da er $w_0^{-1}(z) = w_0^{-1}(z^1, \dots, z^n) = [1, z^1, \dots, z^n]$, og

$$P \circ w_0^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}^1 & \dots & \bar{z}^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}^1 & \dots & \bar{z}^n \\ z^1 & \left|z^1\right|^2 & \dots & z^1 \bar{z}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n & z^n \bar{z}^1 & \dots & \left|z^n\right|^2 \end{pmatrix}.$$

Lad nu π betegne projektionen på første søjle i matricen $P \circ w_0^{-1}(z)$, så er

$$\pi \circ P \circ w_0^{-1}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix},$$

og lad endelig T betegne afbildningen

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \mapsto u_0^{-1} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{u^1}{u^0} \\ \vdots \\ \frac{u^n}{u^0} \end{pmatrix},$$

således at

$$S(z) = T \circ \pi \circ P \circ w_0^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}.$$

$S : w_0(U_0) \to \mathbb{C}^{n+1}$ er en veldefineret afbildning, fordi u^0'et i vektoren som T bruges på, altid er forskellig fra 0.

Af kædereglen er $D_q S = D_{P \circ w_0^{-1}(q)}(T \circ \pi) D_q(P \circ w_0^{-1})$, $q \in w_0(U_0)$, så hvis jacobianten af S er injektiv, så er jacobianten af $P \circ w_0^{-1}$ injektiv. Det smarte ved dette, er at jacobianten af S er meget lettere at udregne end jacobianten af $P \circ w_0^{-1}$.

$$D_q S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{for alle } q \in w_0(U_0).$$

Søjlerne i $D_q S$ er lineært uafhængige i $\mathbb{R}$, hvormed $D_q S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ er injektiv. Som nævnt er dermed også $D_q(P \circ w_0^{-1})$ injektiv, hvormed P er en immersion, og P er en indlejring.

I undertegnedes seminar 'Embedded Submanifolds' blev det vist, at en glat indlejring, rent faktisk er en diffeomorfi. Det nævnes at P er en diffeomorfi, da det skal bruges i et senere spørgsmål. $\square$

Opgave 1.(c)

Ved brug af notationen $dz^j = dx^j + idy^j$, $d\bar{z}^j = dx^j - idy^j$ for $x + iy \in \mathbb{C}$, vis da, at den euklidiske metrik i $\mathbb{C}^{n+1}$ er givet ved

$$g = \sum_j d\bar{z}^j dz^j \tag{2}$$

og den euklidiske metrik i $M(n+1, \mathbb{C})$ ved

$$g = \sum_{j,k} d\bar{z}^{j,k} dz^{j,k} = \mathrm{Tr}(dz^* dz). \tag{3}$$

Bevis. Beviset for første del er enkelt udregning:

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{j=0}^{n} d\bar{z}^j dz^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (dx^j - idy^j)(dx^j + idy^j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (dx^j dx^j + dy^j dy^j + i(dx^j dy^j - dy^j dx^j)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (dx^j)^2 + (dy^j)^2,
\end{aligned}$$

hvor sidste lighed er givet fordi produkterne er symmetriske produkter. Dermed er det vist, at g givet ved (2) er den euklidiske metrik i $\mathbb{C}^{n+1}$.

På tilsvarende vis, verificeres det at g, givet ved (3), er den euklidiske metrik i $M(n+1, \mathbb{C})$. Hvis $z \in M(n+1, \mathbb{C})$ er en matrix på formen $z = (z^{j,k})$, er dz også en matrix på formen $dz = (dz^{j,k})$. Betragt nu den (j,k)'te indgang i $dz^* dz$:

$$\begin{aligned}
(dz^* dz)^{j,k} &= ((d\bar{z}^{l,m})^t (dz^{l,m}))^{j,k} \\
&= \sum_{i=0}^{n} ((d\bar{z}^{l,m})^t)^{j,i} (dz^{i,k}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} d\bar{z}^{i,j} dz^{i,k}.
\end{aligned}$$

Fra (3) skal vi kun bruge diagonalelementerne i matricen $dz^* dz$, så

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(dz^* dz) &= \sum_{j=k} (dz^* dz)^{j,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (dz^* dz)^{k,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} d\bar{z}^{i,k} dz^{i,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (dx^{i,k} - idy^{i,k})(dx^{i,k} - idy^{i,k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (dx^{i,k})^2 + (dy^{i,k})^2,
\end{aligned}$$

som netop er den euklidiske metrik på $\mathbb{C}^{(n+1)^2} \cong \mathbb{R}^{2(n+1)^2}$. Sidste lighed er givet fordi produkterne er symmetriske produkter.

Da $M(n+1,\mathbb{C})$ er et vektorrum er $T_pM(n+1,\mathbb{C}) \cong M(n+1,\mathbb{C})$ for ethvert punkt $p \in M(n+1,\mathbb{C})$. Dermed vil den euklidiske metrik på $M(n+1,\mathbb{C})$, g, evalueret på to tangetvektorer i et punkt i $M(n+1,\mathbb{C})$ være g evalueret på to matricer $A, B \in M(n+1,\mathbb{C})$ givet ved $g(A,B) = \mathrm{Tr}(A^*B)$. Dette skal vise sig særdeles nyttigt senere. $\square$

Opgave 1.(d)

Vis at $\mathbb{C}P^n$ kan gives en riemannsk metrik sådan, at P er en isometri til $P(\mathbb{C}P^n)$ med metrikken induceret fra den euklidiske metrik i $M(n+1,\mathbb{C})$.

Bevis. En nødvendig betingelse for at P er en isometri, er at P er en diffeomorfi – det blev vist i spørgsmål (a).

Hvis P skal være en isometri skal metrikken $\tilde{g}$ på $\mathbb{C}P^n$ være givet ved $\tilde{g} = P^*g$, hvor g er den inducerede metrik på $P(\mathbb{C}P^n)$ i $M(n+1,\mathbb{C})$, og P^* er pullback af P. Den inducerede metrik i $P(\mathbb{C}P^n)$ er blot metrikken i $M(n+1,\mathbb{C})$ restringeret til vektorer tangent til $P(\mathbb{C}P^n)$, og da P er en diffeomorfi er P_* en afbildning hvor $P_* : \mathcal{T}(\mathbb{C}P^n) \to \mathcal{T}(P(\mathbb{C}P^n))$, pr. Proposition 4.10 i [Lee(2002)]. Tilmed er $P_*(X)$ et entydigt bestemt vektorfelt i $\mathcal{T}(P(\mathbb{C}P^n))$ når $X \in \mathcal{T}(\mathbb{C}P^n)$, hvorfor følgende er veldefineret for alle $p \in \mathbb{C}P^n$ og alle $X, Y \in \mathcal{T}(\mathbb{C}P^n)$,

$$\tilde{g}(X,Y)(p) = g(P_*(X), P_*(Y))(P(p)). \tag{4}$$

Det skal nu blot vises at $\tilde{g}$ defineret ved (4) er en riemannsk metrik. Af definitionen side 23 i [Lee(1997)] skal $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2(\mathbb{C}P^n)$, hvilket den tydeligvis er, og derudover skal $\tilde{g}$ være symmetrisk og positiv definit.

$\tilde{g}$ er symmetrisk fordi g er symmetrisk:

$$\tilde{g}(X,Y)(p) = g(P_*(X), P_*(Y))(P(p)) = g(P_*(Y), P_*(X))(P(p)) = \tilde{g}(Y,X)(p).$$

$\tilde{g}$ er positiv definit, fordi P_* er injektiv, da P er en immersion:

$$0 = \tilde{g}(X,X)(p) = g(P_*(X), P_*(X))(P(p)) \iff P_*(X)(P(p)) = 0 \iff X_p = 0.$$

Dermed er det vist, at $\mathbb{C}P^n$ kan gives en metrik så P er en isometri. $\square$

Opgave 1.(e)

Vis, at hvis $S \in U(n+1) \subset M(n+1,\mathbb{C})$ er en unitær matrix, så inducerer afbildningen af $\mathbb{C}^{n+1}$ givet ved S en isometri af $\mathbb{C}P^n$.

Bevis. Lad $S \in U(n+1)$ være en unitær matrix, og definer afbildningen $T : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ ved $[z] \mapsto [Sz]$. Vi ønsker at vise, at T er en isometri af $\mathbb{C}P^n$, altså at $T^*\tilde{g} = \tilde{g}$.

Lad derfor $X, Y \in \mathcal{T}(\mathbb{C}P^n)$ og $[z] \in \mathbb{C}P^n$ være givet. Da er

$$T^*\tilde{g}(X,Y)([z]) = \tilde{g}(T_*(X), T_*(Y))(T([z])) = g((P\circ T)_*(X), (P\circ T)_*(Y))(P(T([z]))), \tag{5}$$

hvor sidste lighed er givet af kædereglen og konstruktionen af $\tilde{g}$. Da $P \circ T([z]) = P([Sz]) = \frac{Szz^*S^*}{z^*z} = SP([z])S^*$ er $P\circ T = \hat{S}\circ P$, hvor $\hat{S} : M(n+1,\mathbb{C}) \to M(n+1,\mathbb{C})$ er similaritets transformationen $A \mapsto SAS^*$. Det betyder at $(P\circ T)_* = (\hat{S}\circ P)_* = \hat{S}_* \circ P_*$, hvor sidst lighed er kædereglen. Hvis nu $\hat{S}$ er en isometri af $M(n+1,\mathbb{C})$ med den euklidiske metrik, kan vi fortsætte regnerierne fra (5):

$$T^*\tilde{g}(X,Y)([z]) = g(\hat{S}_*\circ P_*(X), \hat{S}_*\circ P_*(Y))(SP([z])S^*) = g(P_*(X), P_*(Y))(P([z])) = \tilde{g}(X,Y)(z),$$

hvormed T er en isometri af $\mathbb{C}P^n$.

Det kræver dog, at $\hat{S}$ er en isometri af $M(n+1,\mathbb{C})$. For at se dette skal vi kende $\hat{S}_*$. Men da $\hat{S}$ er en lineær afbildning og $M(n+1,\mathbb{C})$ er et endeligt dimensionalt vektorrum giver følgende diagram fra Proposition 3.8 [Lee(2002)], at $\hat{S}_*(A) = SAS^*$ hvor $A \in M(n+1,\mathbb{C})$.

$$\begin{tikzcd} T_pV \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "L"] \\ T_{L(p)}W \arrow[r, "\cong"'] & W \end{tikzcd}$$

Hvis vi vælger $A,B \in M(n+1,\mathbb{C})$, så blev det nævnt i spørgsmål (d), at $g(A,B) = \mathrm{Tr}(A^*B)$. Dermed er

$$g(\hat{S}_*(A), \hat{S}_*(B)) = g(SAS^*, SBS^*) = \mathrm{Tr}(SA^*S^*SBS^*) = \mathrm{Tr}(SA^*BS^*) = \mathrm{Tr}(A^*B)$$

hvor sidste lighed er kendt fra lineær algebra, da $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Dermed er $\hat{S}$ en isometri af $M(n+1,\mathbb{C})$.

$\square$

Litteratur

[Dupont and Madsen(2007)] Johan L. Dupont and Ib Madsen. *Noter til Geometri*. Januar 2007.

[Lee(2002)] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.

[Lee(1997)] John M. Lee. *Riemannian Manifolds - An introduction to curvature*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1997.