Semigrupper

af

kontraktionsoperatorer

(Semigroups of contraction operators)

Bachelorprojekt i Matematik

Jakob Lindblad Blaavand
2005 3675

Vejleder: Steen Thorbjørnsen   16. juni 2008

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Abstract

To solve the Cauchy problem $f'(t) = Bf(t)$, $f(0) = k$ where B and k are complex numbers and f a continuous function on $\mathbb{R}$, is easy: $f(t) = ke^{tB}$. But what if B is an unbounded linear operator in a Banach space and k an element in this Banach Space? Such differential equations are the foundation on which a lot of physics stand. Just think of the heat equation or the Schrödinger equation. It would be appealing, if we again could write $f(t) = ke^{tB}$ and let this be the solution. In this paper we shall see, how we with strongly continuous semigroups of contraction operators can make sense of the expression e^{tB}, when B has special properties.

The main concern of this paper is to prove the classic theorem of Hille and Yoshida. This is done by establishing relationships between a infinitesimal generator, its resolvent and the semigroup. The theorem of Hille and Yoshida does exactly establish the relationship between the three, and also makes sense of e^{tB}, when B have special properties: the theorem gives necessary and sufficient conditions on an operator to be an infinitesimal generator for a strongly continuous semigroup of contraction operators. One of the conditions is on the norm of the resolvent.

After this we restrict our attention to Hilbert spaces, where we can give necessary and sufficient conditions on an operator to be generator of a strongly continous group of unitary operators: it has to be skew self-adjoint. This theorem is called Stones theorem, and is especially useful in finding solutions to equations like the Schrödinger equation, because the Hamiltonian, H, is self-adjoint and therefore iH is skew self-adjoint. This means that the equation $\frac{d}{dt}U(t) = -i\hbar^{-1}HU(t)$ easily can be solved with the use of the theorem of Stones.

Besides the above, this paper includes a chapter on Banach space integration, with the definition of an abstract Riemann integral. It also includes a chapter on the basic results from the theory of unbounded linear operators. These two chapters serve only as a tool to the main chapter on semigroups.

Indholdsfortegnelse

Indledning

At løse Cauchyproblemet $f'(t) = Bf(t)$, $f(0) = k$ hvor B og k er komplekse tal og f en kontinuert funktion på $\mathbb{R}$, er ikke svært: $f(t) = ke^{tB}$. Men hvad nu, hvis B er en ubegrænset lineær operator i et vilkårligt Banachrum? Sådanne diffrentialligninger er fundamentet for meget fysik, tænk blot på varmeledningsligningen eller Schrödingerligningen. Det ville derfor være tillokkende, om vi igen kunne skrive $f(t) = ke^{tB}$ og lade dette være løsningen. Vi skal i denne opgave se på, hvordan vi med stærkt kontinuerte semigrupper af kontraktionsoperatorer kan give mening til udtrykket e^{tB} når B har nogle særlige egenskaber. Den første hovedsætning, der giver mening til e^{tB}, er Hille–Yoshidas sætning. Hille–Yoshidas sætning bliver vist som den sidste del i en undersøgelse af forholdet mellem en stærkt kontinuert semigruppe, dennes infinitesimale frembringer og frembringerens resolvent. Hille-Yoshidas sætning giver nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at en operator B kan frembringe en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe.

Efter Hille–Yoshidas sætning skal vi indsnævre fokus til kun at betragte kontraktionsoperatorer i et Hilbertrum. I Hilbertrum kan vi nemlig vise et stærkt resultat, der giver en entydig korrespondance mellem stærkt kontinuerte grupper af unitære operatorer og skævselvadjungerede operatorer: den klassiske Stones sætning.

Men for at nå så langt, skal vi i første omgang have introduceret det integral der skal bruges i semigruppeteorien. I behandlingen af semigrupper skal vi integrere funktioner, der tager værdier i et Banachrum. Da vi kun behøver at se på norm-kontinuerte funktioner, bilver Banachrumsintegralet defineret via Riemannsummer. Kapitel 1 giver en grundig introduktion til integralet og nogle af dets egenskaber – egenskaber der er grundlaget for det efterfølgende studie af semigrupper.

I Kapitel 3 er fokus rettet mod semigrupper, og specielt mod den infinitesimale frembringer. Men da den infinitesimale frembringer i udgangspunktet er defineret som en ubegrænset lineær operator, er det nødvendigt at kende til noget operatorteori for ubegrænsede operatorer. Operatorteorien for ubegrænsede operatorer findes i kapitel 2. Kapitlet indeholder bl.a. en meget nyttig sætning, der via den nedre grænse af en operator, afslører ubegrænsede operatorers egenskaber i et Hilbertrum.

Opgaven er forsynet med et appendiks indeholdende resultater der benyttes i opgaven, men som ikke er vigtige for sammenhængen i opgaven. Resultaterne er taget med for fuldstændighedens skyld.

Opgaven er primært baseret på Grubb [1984] og Lax and Phillips [1967]. For yderligere inspiration, fordybelse, perspektiv og forståelse er der søgt hjælp i Engel and Nagel [2006], Hille and Phillips [1957], Planetmath [ban], Vesterstrøm [2004] og Cordes [1987].

Opgaven er skrevet i forbindelse med kurset *Videregående Analyse* i forårssemesteret 2008, under kyndig vejledning af Steen Thorbjørnsen.

Jakob Lindblad Blaavand
Århus, 16. juni 2008

1 Integration i Banachrum

Inden vi begynder på teorien om semigrupper, skal vi have introduceret det integral vi skal benytte. I behandlingen af semigruppeteorien skal funktioner, der tager værdier i et generelt Banachrum integreres. Der kunne bruges mange forskellige former for integraler, men da denne behandling kan nøjes med et integral defineret med Riemannsummer, er dette udgangspunktet. Det skal bemærkes, at den følgende teori vil reducere til det almindelige Riemann-integral i $\mathbb{C}^n$.

Definition 1.1 (Riemann-integralet)**.** Lad $x : [\alpha, \beta] \to X$, hvor X er et Banachrum, være en norm-kontinuert funktion[1]. Lad $\mathcal{P}^{(n)}$ være en partition af $[\alpha, \beta]$. En partition, $\mathcal{P}^{(n)}$, er en inddeling af intervallet i en række delepunkter $\alpha = \pi_0^{(n)} \leq \pi_1^{(n)} \leq \cdots \leq \pi_{k(n)}^{(n)} = \beta$ og en række punkter, $\tau_i^{(n)}$, i hvert interval: $\pi_{i-1}^{(n)} \leq \tau_i^{(n)} \leq \pi_i^{(n)}$.

Vi definerer $\|\mathcal{P}^{(n)}\| = \max_i \left|\pi_i^{(n)} - \pi_{i-1}^{(n)}\right|$, og Riemann-afsnitssummen

$$S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x) = \sum_{i=1}^{k(n)} x(\tau_i^{(n)})(\pi_i^{(n)} - \pi_{i-1}^{(n)}).$$

Hvis der for en vilkårlig følge $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$ af partitioner, hvor $\|\mathcal{P}^{(n)}\| \to 0$ for $n \to \infty$, gælder at

$$\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$$

eksisterer i X mht. normtopologien og er uafhængig af følgen $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$, så defineres *Riemann-integralet*

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x).$$

Bemærkning 1.2. Når der tales om eksistensen af grænseværdier i dette afsnit, er det altid i forhold til normtopologien. Den ovenstående definition ville kunne gøres mere generel ved at sige, at hvis grænseværdien eksisterede mht. en anden topologi, så ville integralet være defineret relativt til denne topologi. I den følgende sætning er integralet dog bundet til at eksistere i normtopologien. Det er dog også nok for resten af opgaven at grænseværdien eksisterer i normtopologien, og derfor er normtopologien bygget ind i definitionen.

For at Riemann-integralet kan bruges til noget, skal det i hvert fald være muligt at integrere norm-kontinuerte vektorfunktioner. Men det giver følgende sætning netop.

Sætning 1.3. *Antag at $x(t)$ er en norm-kontinuert vektorfunktion fra $[\alpha, \beta]$ ind i et Banachrum X. Da eksisterer integralet $\int_\alpha^\beta x(t)\,dt$.*

[1] Det er, hvad vi kender som almindelig kontinuitet. I modsætning hertil er svag kontinuitet: $f \circ x$ er norm-kontinuert i $\mathbb{C}$, hvor f er en kontinuert funktional. Da funktionalen netop er kontinuert giver norm-kontinuitet svag kontinuitet, men ikke generelt omvendt.

Bevis. Da $x(t)$ er norm-kontinuert på $[\alpha, \beta]$ er $x(t)$ uniformt kontinuert på $[\alpha, \beta]$. Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes et $\delta > 0$ så $\|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon$ hvis $|t' - t''| < \delta$.

Lad en følge af partitioner $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ være givet, så $\|\mathcal{P}^{(n)}\| \to 0$ for $n \to \infty$. Da findes et $N \in \mathbb{N}$ så $\|\mathcal{P}^{(n)}\|, \|\mathcal{P}^{(m)}\| < \delta/3$ for $n, m \geq N$.

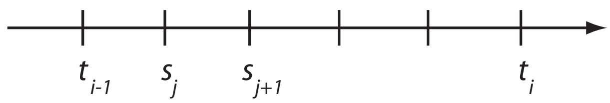
Vi ser nu på to partitioner $\mathcal{P}^{(n)}$ og $\mathcal{P}^{(m)}$ hvor $n, m \geq N$. Delepunkterne for $\mathcal{P}^{(n)}$ er $\{t_0, t_1, \ldots, t_l\}$ og delepunkterne for $\mathcal{P}^{(m)}$ er $\{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$. Ligeledes har vi de valgte punkter $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l\}$ og $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ for henholdsvis $\mathcal{P}^{(n)}$ og $\mathcal{P}^{(m)}$. Indeksene ${}^{(n)}$ og ${}^{(m)}$ på delepunkterne og de valgte punkter er her undertrykt for at lette notationen.

For at vise at grænseværdien $\lim_{n \to \infty} S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$ eksisterer, skal vi vise at

$$\|\sum_{i=1}^{l} x(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{k} x(\sigma_j)(s_j - s_{j-1})\| < \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Fordi så er $S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$ en Cauchyfølge i X, og da X er et Banachrum er $S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$ konvergent, hvormed grænseværdien eksisterer for en vilkårligt valgt følge $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Følgende illustration kan være nyttig for at holde rede på de følgende argumenter.



Ideen er at lave en ny inddeling af $[\alpha, \beta]$, ved at slå de to partitioner sammen, vi allerede har. Vi samler derfor alle delepunkterne i én mængde $\{u_h\}$ med q elementer og $q \leq l + k$. Vi har stadig vores gamle valgte punkter for $\mathcal{P}^{(n)}$ og $\mathcal{P}^{(m)}$ – og dem skal vi beholde. Vi laver nu to mængder af tal med udgangspunkt i mængderne $\{\tau_i\}$ og $\{\sigma_j\}$. For mængden $\{\rho_h\}$ hørende til $\mathcal{P}^{(n)}$, vælges $\rho_h = \tau_i$ hvis $t_{i-1} < u_h \leq t_i$ og for mængden $\{\xi_h\}$ vælges $\xi_h = \sigma_j$ hvis $s_{j-1} < u_h \leq s_j$. Altså indeholder $\{\rho_h\}$ og $\{\xi_h\}$ hhv $\{\tau_i\}$ og $\{\sigma_j\}$, hvor nogle af τ_i'erne og σ_j'erne er gentaget. Dermed vil ρ_h og ξ_h ikke nødvendigvis ligge i intervallet $[u_{h-1}, u_h]$, og vi kan derfor ikke sige at vi har konstrueret en ny partition. Men idéen i at vælge punkterne således er, at

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} x(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{h=1}^{q} x(\rho_h)(u_h - u_{h-1}) \quad \text{og} \\ \sum_{j=1}^{k} x(\sigma_j)(s_j - s_{j-1}) &= \sum_{h=1}^{q} x(\xi_h)(u_h - u_{h-1}).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Vi udvælger nu et tilfældigt u_h og ser på intervallet $[u_{h-1}, u_h]$. Der er tre muligheder. Enten kommer både u_h og u_{h-1} fra $\{t_i\}$ eller fra $\{s_j\}$. Det kan også være, at u_h er fra $\{t_i\}$ og u_{h-1} fra $\{s_j\}$, og omvendt.

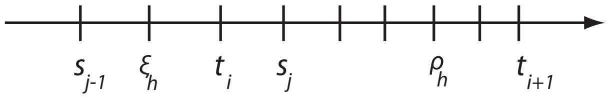
Vi behandler først tilfældet hvor $u_h, u_{h-1} \in \{s_j\}$, og vi vil undersøge hvor stor forskellen på ρ_h og ξ_h er. Da $u_{h-1}, u_h \in \{s_j\}$ så er $\xi_h \in [s_{j-1}, s_j]$ for et passende j. Men da u_{h-1} og u_h er to på hinanden følgende elementer fra $\{s_j\}$ så er $[s_{j-1}, s_j] \subseteq [t_{i-1}, t_i]$ for et passende i, hvor $\rho_h \in [t_{i-1}, t_i]$.[2] Da nu både ρ_h og ξ_h er i $[t_{i-1}, t_i]$ er

$$|\rho_h - \xi_h| \leq |t_i - t_{i-1}| < \delta/3 \quad \text{og dermed er} \quad \|x(\rho_h) - x(\xi_h)\| < \varepsilon.$$

I tilfældet hvor u_h, u_{h-1} er fra $\{t_i\}$, kan vi på præcis samme måde vise, at også her er $\|x(\rho_h) - x(\xi_h)\| < \varepsilon$ for alle h.

I tilfældet hvor $u_h \in \{s_j\}$ og $u_{h-1} \in \{t_i\}$ ser vi igen på $|\rho_h - \xi_h|$. Da er $u_{h-1} = t_i$ og $u_h = s_j$ for passende i og j. Det betyder at $\rho_h \in [t_i, t_{i+1}]$ og $\xi_h \in [s_{j-1}, s_j]$.

[2] se ovenstående illustration



Vi har nu

$$|\rho_h - \xi_h| \leq |\rho_h - t_i| + |t_i - s_j| + |s_j - \xi_h| < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta,$$

så igen er

$$\|x(\rho_h) - x(\xi_h)\| < \varepsilon \quad \text{for alle } h.$$

Fra (1.1) har vi nu at

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{i=1}^{l} x(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{k} x(\sigma_j)(s_j - s_{j-1})\| \\
&\qquad = \|\sum_{h=1}^{q} x(\rho_h)(u_h - u_{h-1}) - \sum_{h=1}^{q} x(\xi_h)(u_h - u_{h-1})\| \\
&\qquad = \|\sum_{h=1}^{q} (x(\rho_h) - x(\xi_h))(u_h - u_{h-1})\| \leq \sum_{k=1}^{q} \|x(\rho_h) - x(\xi_h)\| \, |u_h - u_{h-1}| \\
&\qquad < \sum_{h=1}^{q} \varepsilon \, |u_h - u_{h-1}| = \varepsilon(\beta - \alpha).
\end{aligned}$$

Dermed er $S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$ altså en Cauchyfølge i X. Da $\mathcal{P}^{(n)}$ var vilkårlig, er det vist at grænseværdien $\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)$ eksisterer for en vilkårligt valgt følge af partitioner, med betingelsen at normen af partitionen går mod nul for $n \to \infty$.

Vi mangler nu blot entydigheden af grænseværdien. Lad derfor to forskellige følger $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$ og $\{\mathcal{Q}^{(n)}\}$ være givet så $\|\mathcal{P}^{(n)}\| \to 0$ og $\|\mathcal{Q}^{(n)}\| \to 0$ for $n \to \infty$.

Dan nu følgen $\{\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{Q}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{Q}^{(2)}, \dots\} = \{\mathcal{U}^{(n)}\}$. Denne følge har også klart egenskaben at $\|\mathcal{U}^{(n)}\| \to 0$ for $n \to \infty$. Fra ovenstående ved vi at $\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{U}^{(n)}}$ eksisterer. Da vil enhver konvergent delfølge også konvergere mod samme grænseværdi som $S_{\mathcal{U}^{(n)}}$, hvorfor specielt $S_{\mathcal{P}^{(n)}}$ og $S_{\mathcal{Q}^{(n)}}$ har samme grænseværdi. Dermed er entydigheden af grænseværdien vist. Altså er grænseværdien uafhængig af valget af følge. Derfor eksisterer Riemann-integralet for norm-kontinuerte vektorfunktioner.

$\square$

I teorien om semigrupper er følgende egenskaber ved Riemann-integralet de grundlæggende byggesten. Først og fremmest skal vi se, at Riemann-integralet kommuterer med en vilkårlig kontinuert lineær funktional.

Lemma 1.4. *Lad $x : [\alpha, \beta] \to X$ være en norm-kontinuert vektorfunktion, og $\varphi \in X^*$ en kontinuert lineær funktional. Da er*

$$\varphi\Big(\int_\alpha^\beta x(t)\, dt\Big) = \int_\alpha^\beta \varphi \circ x(t)\, dt$$

Bevis. Lad $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$ være en vilkårlig følge af partitioner så $\|\mathcal{P}\| \to 0$ for $n \to \infty$. Beviset kan nu klares i én udregning

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\Big) &= \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(S_{\mathcal{P}^{(n)}}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{k(n)} x(\tau_i^{(n)})(\pi_i^{(n)} - \pi_{i-1}^{(n)})\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \varphi(x(\tau_i^{(n)}))(\pi_i^{(n)} - \pi_{i-1}^{(n)}) \\
&= \int_\alpha^\beta \varphi \circ x(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Andet lighedstegn kommer af kontinuiteten af φ og fjerde lighed af lineariteten af φ. Sidste lighed kommer fra definitionen af Riemann-integralet restringeret til Banachrummet $\mathbb{C}$. $\square$

Den ofte benyttede vurdering, med at normen af et integral er mindre end integralet af normen, gælder også for vort nye Riemann-integral.

Proposition 1.5. *Lad $x : I \to X$ være en norm-kontinuert vektorfunktion. Da gælder, at*

$$\|\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\| \leq \int_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt.$$

Bevis. Lad $w = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt$, og definer $\varphi_0 : \mathbb{C}w \to \mathbb{C}$ ved

$$zw \mapsto z\|w\|,$$

som er en lineær funktional. Da

$$|\varphi_0(zw)| = |z|\,\|w\| = \|zw\| \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C},$$

følger det af Hahn–Banachs udvidelsessætning[3], at der findes en funktional $\varphi : X \to \mathbb{C}$, der udvider φ_0 og opfylder, at $|\varphi(y)| \leq \|y\|$ for alle $y \in X$.

Da φ er en udvidelse af φ_0 har vi først og fremmest, at

$$\varphi(w) = \varphi_0(w) = \|w\|,$$

og dernæst, da $|\varphi(y)| \leq \|y\|$ for alle $y \in X$, er $\|\varphi\| \leq 1$, hvorfor $\varphi \in X^*$. Nu er vi i stand til at vise uligheden.

$$\begin{aligned}
\|\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\| &= \|w\| = \varphi(w) = \varphi\Big(\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\Big) \\
&= \int_\alpha^\beta (\varphi \circ x)(t)\,dt \quad \text{pr. Lemma 1.4} \\
&\leq \int_\alpha^\beta |(\varphi \circ x)(t)|\,dt \leq \int_\alpha^\beta \|\varphi\|\|x(t)\|\,dt \\
&\leq \int_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt.
\end{aligned}$$

$\square$

[3] fra Rudin [1973] Sætning 3.3 side 58.

Udover de indledende tre propositioner får vi brug for følgende i vores arbejde med semigrupper. Beviserne er at finde i Appendiks A.1.

I et generelt Banachrum har vi desværre ikke den ellers så brugbare middelværdisætning. Men til trods for det, har vi alligevel analysens anden fundamentalsætning: For en norm-differentiabel vektorfunktion $x : I \to X$, I åbent interval og $[\alpha, \beta] \subset I$, med norm-kontinuert afledet gælder at

$$\int_{\alpha}^{\beta} x'(t)\, dt = x(\beta) - x(\alpha). \tag{1.2}$$

At en vektorfunktion, $x : I \to X$, er norm-differentiabel betyder, at $\lim_{h\to 0}(x(t+h) - x(t))/h$ eksisterer for t og $t + h \in I$. Den afledte betegnes $x'(t)$ eller $\frac{dx}{dt}$, og $x(t)$ betegnes blot som værende differentiabel.

Selvom vi ikke har en decideret middelværdisætning, har vi, at der trods alt for en norm-kontinuert vektorfunktion $x : I \to X$, gælder at

$$\frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} x(t)\, dt \to x(c) \quad \text{for} \quad h \to 0, \tag{1.3}$$

når $c \in I$. Denne lille middelværdisætning følger af Proposition 1.5.

2 Ubegrænsede operatorer

2.1 Indledende definitioner

En *ubegrænset lineær operator* (mellem komplekse Banachrum X og Y) er en lineær afbildning, $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ fra et lineært underrum $\mathcal{D}(T)$ af X til Y. $\mathcal{D}(T)$ kaldes domænet af T, og den specifikke udformning af $\mathcal{D}(T)$ spiller en stor rolle for ubegrænsede lineære operatorer. I hele denne opgave ser vi kun på lineære operatorer, og derfor benævnes en lineær operator blot som en operator. Ofte ser vi på operatorer, hvor domænet er tæt i X; disse operatorer kaldes *tæt definerede*. Hvis domænet er underforstået, skrives i det følgende $T : X \to Y$. I resten af dette kapitel betegner T en ubegrænset operator. En *begrænset* operator er en speciel ubegrænset operator, nemlig en operator, hvor der gælder at

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|/\|u\| : 0 \neq u \in \mathcal{D}(A)\} < \infty,$$

som derfor er kontinuert. Da en begrænset operator er kontinuert mht. operatornormtopologien, så har den en entydig udvidelse til hele X, hvis domænet et tæt i X. Derfor er det i mange tilfælde uinteressant at se på domænet af en begrænset operator.

Af yderligere notation, betegner $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : \exists\, x \in \mathcal{D}(T), y = Tx\}$ underrummet af Y, som er T's værdimængde.

Hvis T og S er to ubegrænsede operatorer, skal vi være påpasselige når vi regner med dem. $(T + S)x = Tx + Sx$ giver kun mening for $x \in \mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$, og $(TS)x = T(Sx)$ giver kun mening for $x \in \mathcal{D}(TS) = \{x \in \mathcal{D}(S) : Sx \in \mathcal{D}(T)\}$.

Når vi betragter operatorer, der ikke er defineret i hele domænerummet, så kan vi begynde at give mening til udvidelser og restriktioner af operatorer. Hvis S og T er to operatorer fra X til Y sådan at $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ og $Su = Tu$ for alle $u \in \mathcal{D}(S)$, kaldes T en udvidelse af S, og S kaldes en restriktion af T. Symbolsk betegnes dette $T \supset S$ og $S \subset T$.

At en operator er begrænset er ækvivalent med, at den er kontinuert mht. operatornormtopologien. Dermed er denne form for kontinuitet ikke til rådighed i arbejdet med ubegrænsede operatorer. Til gengæld indføres en definition, som er næsten lige så god som norm-kontinuitet – nemlig definitionen af de lukkede operatorer:

Definition 2.1. En lineær operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ siges at være afsluttet (lukket) når grafen $\mathcal{G}(T)$, givet ved

$$\mathcal{G}(T) = \{\{x, Tx\} : x \in \mathcal{D}(T)\},$$

er et afsluttet underrum af $X \times Y$.

At denne afsluttethed er næsten lige så godt som norm-kontinuitet er indholdet af følgende lemma, som er medtaget uden bevis.

Lemma 2.2. *$T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ er afsluttet hvis og kun hvis der gælder, at når $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge i $\mathcal{D}(T)$ med $x_n \to x$ i X og $Tx_n \to y$ i Y, så er $x \in \mathcal{D}(T)$ med $y = Tx$.*

Når operatoren $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ er tæt defineret, defineres den *adjungerede operator*, $T^* : Y^* \to X^*$, som den operator, hvor $\mathcal{D}(T^*)$ består af de $y^* \in Y^*$, hvor funktionalen $x \mapsto y^*(Tx)$, $x \in \mathcal{D}(T)$, er kontinuert fra $\mathcal{D}(T) \subset X$ til $\mathbb{C}$. Spørgsmålet er så, hvad T^* skal gøre ved elementerne i $\mathcal{D}(T^*)$? Da $\mathcal{D}(T)$ er tæt i X betyder det, at funktionalen kan udvides ved kontinuitet til hele X, hvorfor der findes et entydigt bestemt $x^* \in X^*$, så

$$y^*(Tx) = x^*(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

Da nu x^* er bestemt ved y^*, defineres T^* som

$$T^* y^* = x^*.$$

Hvis der for en operator T i et Hilbertrum gælder, at $T \subset T^*$, kaldes T *symmetrisk.* Hvis der yderligere gælder, at $T = T^*$, kaldes T *selvadjungeret.* Det kan bemærkes, at hvis T er begrænset, er de to definitioner sammenfaldende, men generelt er de ikke.

Ved direkte anvendelse af Lemma 2.2 ses det, at den adjungerede operator T^* er afsluttet.

Hvis T er en tæt defineret operator i et Hilbertrum, så falder den sædvanlige definition af den adjungerede operator, som operatoren T^*, der opfylder at $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, ud af ovenstående. Grunden til dette er, at Hilbertrum er selvduale og funktionalen er $y^*(x) = \langle x, y\rangle$.

Et sidste operatorteoretisk begreb, der er nødvendigt i denne opgave, er *resolventmængden*, $\rho(T)$, af en operator T. $\rho(T)$ er mængden af de $\lambda \in \mathbb{C}$ hvor $T - \lambda I$ er en bijektion af $\mathcal{D}(T)$ på X med begrænset invers $(T - \lambda I)^{-1}$; inversen kaldes resolventet af T. Spektret af T, $\sigma(T)$, defineres som resolventmængdens komplementærmængde.

2.2 Operatorer i Hilbertrum

I opgavens sidste afsnit behandles semigrupper af operatorer i et Hilbertrum, og her giver det indre produkt mulighed for at konkretisere teorien fra det generelle Banachrum. Fx er Hilbertrum selvduale, hvormed der er godt styr på funktionalerne og de adjungerede operatorer. Er T en operator i Hilbertrummet H så fås fra projektionssætningen[1] at

$$H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{Z}(T^*), \tag{2.1}$$

hvor $\mathcal{Z}(T^*)$ er kernen af T^*.

Den *nedre grænse* af en operator T i et Hilbertrum er

$$m(T) = \inf\{\operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(T), \|x\| = 1\}. \tag{2.2}$$

T siges at være nedad halvbegrænset, hvis $m(T) > -\infty$, og opad halvbegrænset, hvis $m(-T) > -\infty$ og $-m(-T)$ kaldes T's øvre grænse. Det bør specielt bemærkes at en symmetrisk operator, S, er karakteriseret ved, at

$$m(iS) = 0 = m(-iS). \tag{2.3}$$

Beviset for dette findes i Appendiks A.2.

Som det ses af følgende sætning, er den nedre grænse af en operator i H en meget nyttig størrelse til identificering af operatorens egenskaber.

[1] Vesterstrøm [2004] Sætning 2.17 side 18

Sætning 2.3. *Lad T være en operator i et Hilbertrum H.*

1. *Hvis $m(T) \geq \alpha > 0$, så er T injektiv og T^{-1} er en begrænset operator i H med norm $\|T^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$ og med $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$.*

2. *Hvis endvidere T er afsluttet, så er $\mathcal{R}(T)$ afsluttet.*

3. *Hvis T er afsluttet og tæt defineret, og såvel $m(T)$ som $m(T^*)$ er $\geq \beta$, så er halvrummet $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < \beta\}$ indeholdt i resolventmængden for T og for T^*.*

Bevis. 1): Hjørnestenen i beviset er følgende ulighed

$$\|x\|^2\alpha \leq \operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle \leq |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(T),$$

hvor første ulighed er givet af antagelsen om at $m(T) \geq \alpha$. Hvis $\|x\| \neq 0$, kan der divideres med $\|x\|$, og uligheden giver at $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ for $x \in \mathcal{D}(T)$. Specielt er T injektiv: T er lineær, så hvis $\mathcal{Z}(T) = \{0\}$ er T injektiv. Så antag derfor, at $Tx = 0$. Da giver uligheden at $0 = \|Tx\| \geq \alpha\|x\| \geq 0$ da $\alpha > 0$. Altså er $\|x\| = 0$, og altså $x = 0$.

Lad nu $Tx = y \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$, så giver uligheden at

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \alpha^{-1}\|y\|,$$

hvormed 1. er vist.

2): Da T er afsluttet er T^{-1} også afsluttet: grafen for T består af parrene $\{x, Tx\}$ hvor $x \in \mathcal{D}(T)$ og grafen for T^{-1} består af parrene $\{Tx, x\}$ hvor $x \in \mathcal{D}(T)$. Da T^{-1} er begrænset og derfor operatornorm-kontinuert, giver Lemma 2.2 at $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$ afsluttet.

3): For at vise dette skal det undersøges om $T - \lambda I$ og $T^* - \bar{\lambda}I$ er bijektioner af $\mathcal{D}(T)$ på H med begrænsede inverser, når $\operatorname{Re}\lambda < \beta$. Lad derfor $\operatorname{Re}\lambda < \beta$. Da findes et $\alpha > 0$ så $\operatorname{Re}\lambda = \beta - \alpha$. Ideen er at bruge 1. og 2. til at give konklusionen. Derfor må $m(T - \lambda I)$ og $m(T^* - \bar{\lambda}I)$ undersøges.

$$\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle - \lambda,$$

af (2.2). Dermed er

$$\operatorname{Re}\langle (T - \lambda I)x, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle - \operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle - \beta + \alpha.$$

Da ses at $m(T - \lambda I) = m(T) - \beta + \alpha \geq \alpha$. På samme måde kan det vises at $m(T^* - \lambda I) \geq \alpha$. 1. giver nu, at $T - \lambda I$ og $T^* - \bar{\lambda}I$ er injektive med begrænsede inverser og 2. giver at operatorerne har afsluttede værdimængder. For at vise 3. mangler operatorerne $T - \lambda I$ og $T^* - \bar{\lambda}I$ blot at være surjektive. Men da

$$\{0\} = \mathcal{Z}(T - \lambda I) = \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)}^{\perp} = \mathcal{R}(T - \lambda I)^{\perp},$$

fordi $T - \lambda I$ er injektiv og har afsluttet værdimængde, er $H = \mathcal{R}(T - \lambda I)$, og $T - \lambda I$ er surjektiv. Det samme gælder naturligvis for $T^* - \bar{\lambda}I$. $\square$

Sætning 2.4. *Lad S være en tæt defineret symmetrisk operator i H. Så er S selvadjungeret, hvis og kun hvis*

$$\mathcal{R}(S + iI) = H = \mathcal{R}(S - iI), \tag{2.4}$$

og da er $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(S)$.

Bevis. Lad først S være selvadjungeret. S er så specielt symmetrisk, og fra (2.3) er $m(iS) = 0 = m(-iS)$. Da opfylder iS og $-iS$ betingelserne i Sætning 2.3.3 så $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\} \subset \rho(iS)$ og $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\} \subset \rho(-iS)$.

Se nu på $\lambda \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Af ovenstående eksisterer $(iS - \lambda I)^{-1}$, og da

$$i(iS - \lambda I)^{-1} = -(S + i\lambda I)^{-1} = -(S - (-i\lambda)I)^{-1}$$

så findes $(S - \lambda I)^{-1}$ hvis $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Altså er $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\} \subset \rho(S)$, og på tilsvarende vis kan det vises, at $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda < 0\} \subset \rho(S)$ vha $-iS$. Specielt gælder at $S + iI$ og $S - iI$ er bijektioner af $\mathcal{D}(S)$ på H, hvormed $\mathcal{R}(S + iI) = H = \mathcal{R}(S - iI)$.

Lad omvendt S være symmetrisk og lad $S + iI$ og $S - iI$ være surjektive. Af (2.1) er $(S \pm iI)^* = S^* \mp iI$ injektive. Da S er symmetrisk er $S \subset S^*$, så $S^* + iI$ er en injektiv udvidelse af $S + iI$. Så da $S + iI$ er surjektiv er $S + iI$ altså en bijektion af $\mathcal{D}(S)$ på H. Det betyder, at hvis $x \in \mathcal{D}(S^*)$ så findes et $y \in \mathcal{D}(S)$ så $(S^* + iI)x = (S + iI)y = (S^* + iI)y$, hvor sidste lighed kommer af, at S er symmetrisk. Men da $S^* + iI$ er injektiv så er $x = y$, og altså er $x \in \mathcal{D}(S)$ og samtidig er $(S^* + iI)x = (S + iI)x$ hvormed $S^*x = Sx$. Altså er $S^* \subset S$, hvorfor $S^* = S$ og S er selvadjungeret.

Det fremgår også af ovenstående, at hvis S er selvadjungeret, er $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(S)$. $\square$

3 Semigrupper

Definition 3.1. En *semigruppe* af operatorer i et Banachrum X er en én-parameter familie af operatorer, $\{G(t) : t \geq 0\}$, der opfylder at

(a) $G(0) = I$, og $G(s+t) = G(s)G(t)$ for alle s og $t \geq 0$.

I en *gruppe* gælder egenskab (a) for alle $s, t \in \mathbb{R}$ og ikke kun for ikke-negative t og s. Det kan bemærkes, at i en gruppe betyder ovenstående specielt at $G(t)$ er invertibel med invers $G(t)^{-1} = G(-t)$. Desuden er $\{G(t)\}$ og $\{G(-t)\}$ semigrupper for $t \geq 0$.

I denne behandling af semigrupper vil vi yderligere kræve, at

(b) $G(t)x \to x$ for $t \to 0^+$, for hvert $x \in X$,

som giver semigrupperne stærk kontinuitet[1]. Derudover begrænses behandlingen til semigrupper af kontraktioner:

(c) $\|G(t)\| \leq 1$ for alle t.

Som nævnt er semigrupperne der opfylder (a) – (c), betragtet som funktioner i t, $G(t)x : [0, \infty) \to X$, *stærkt kontinuerte*: For ifølge (a) og (c) gælder der for $t_1 \leq t_2$, at

$$\|G(t_2)x - G(t_1)x\| = \|G(t_1)(G(t_2 - t_1)x - x)\| \leq \|G(t_2 - t_1)x - x\|.$$

Hvis t_1 og t_2 konvergerer mod $t_0 \in [t_1, t_2]$, vil $t_2 - t_1$ gå mod 0^+, og ifølge (b) vil udtrykket gå mod 0. Derfor kaldes semigrupper der opfylder (a) - (c) for stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper. Grunden til at dette kaldes stærk kontinuitet er, at kontinuitetsegenskaben er ensbetydende med, at $t \mapsto G(t)$ er kontinuert fra $[0, \infty)$ til rummet af begrænsede operatorer på X, $\mathcal{B}(X)$, udstyret med topologien kommende fra den punktvise normkonvergens på X, dette er netop den stærke operatortopologi.

3.1 Den infinitesimale frembringer og dens egenskaber

En helt central størrelse i behandlingen af semigrupper er den *infinitesimale frembringer* for en semigruppe.

Definition 3.2. Den infinitesimale frembringer $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$, er operatoren defineret ved

$$Bx = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(G(h) - I)x, \tag{3.1}$$

hvor $\mathcal{D}(B)$ består af de x hvor grænseværdien eksisterer i X mht. normen i X.

[1] Nogle steder i litteraturen er (b) faktisk erstattet med et krav om stærk kontinuitet. Men da (b) i denne sammenhæng er ækvivalent med stærk kontinuitet har det ingen betydning, om vi definerer det ene eller det andet.

Det lineære underrum, $\mathcal{D}(B)$, er en essentiel del af definitionen af frembringeren. Derfor bør frembringeren altid omtales sammen med domænet, men det vil blive for besværligt i det følgende, så vi skriver B med domænet underforstået som
$\mathcal{D}(B) = \{x \in X : \lim_{h\to 0^+}(h^{-1}(G(h)x - x))$ eksisterer i $X\}$.

I det følgende vil vi søge at kortlægge nogle af de egenskaber denne ubegrænsede operator har, samt opstille kriterier for, hvornår en operator kan få betegnelsen infinitesimal frembringer for en stærk kontinuert kontraktionssemigruppe. Derudover skal vi se, hvordan resolventen $(B - \lambda I)^{-1}$ af en operator B får vigtig betydning i semigruppeteorien. Vi skal altså undersøge sammenhængene illustreret i denne trekant:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & \begin{matrix}\text{semigruppe}\\ \{G(t)\}_{t\geq 0}\end{matrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{matrix} B \\ \text{frembringer}\end{matrix} \arrow[rr] & & \begin{matrix}(B-\lambda I)^{-1}_{\lambda\in\rho(B)} \\ \text{resolvent}\end{matrix} \end{tikzcd}$$

Først og fremmest skal det bemærkes, at fra definitionen, ses det at den infinitesimale frembringer kan opfattes som den tidsafledede af semigruppen evalueret i 0. En konsekvens af indførelsen af den infinitesimale frembringer er, altså at det nu er muligt at differentiere $G(t)x$ for $x \in \mathcal{D}(B)$, mht. t.

Proposition 3.3. *For $x \in \mathcal{D}(B)$ er funktionen $G(t)x : [0, \infty) \to X$ differentiabel med*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(G(t+h)x - G(t)x) = G(t)Bx = BG(t)x \quad \textit{for alle} \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Dermed er det også givet, at $G(t)$ og B kommuterer, når $x \in \mathcal{D}(B)$.

Bevis. Lad $h > 0$. Da giver (a), at

$$\frac{1}{h}(G(t+h)x - G(t)x) = G(t)\frac{G(h) - I}{h}x = \frac{G(h) - I}{h}G(t)x.$$

Hvis $x \in \mathcal{D}(B)$ konvergerer det midterste udtryk mod $G(t)Bx$ for $h \to 0^+$. Det betyder specielt at $G(t)\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B)$. Inklusionen betyder at sidste lighed i (3.2) gælder, hvis den første gælder. Derudover ses det, at (3.2) er opfyldt hvis grænseovergangen er gennem positive h. Derfor skal vi også vise (3.2) for grænseovergang gennem negative h. Dette er en smule mere besværligt end det netop viste.

Lad nu $h < 0$,[2] og for $x \in \mathcal{D}(B)$ se på

$$\frac{1}{h}(G(t+h)x - G(t)x) - G(t)Bx = G(t+h)\frac{G(-h) - I}{-h}x - G(t)Bx \tag{3.3}$$

$$= G(t+h)\left(\frac{G(-h) - I}{-h}x - Bx\right) + (G(t+h) - G(t))Bx. \tag{3.4}$$

For et givet ε giver ovenstående os nu mulighed for at vælge et h_0 så $\|\frac{G(-h)-I}{-h}x - Bx\| < \varepsilon$ for $h_0 \leq h < 0$. Da $G(t)$ er en kontraktionssemigruppe er normen af første led i (3.3) mindre end ε. Af $G(t)$'s kontinuitet, kan vi herefter vælge $h \in [h_0, 0)$ så det andet led i (3.3) er mindre end ε. Dermed eksisterer grænseovergangen også for $h < 0$ i X, hvorfor $G(t)x$ er differentiabel for alle $x \in \mathcal{D}(B)$.

$\square$

[2] da h skal gå mod 0 kan vi vælge $h > -t$

Et ganske brugbart korollar af Proposition 3.3, er at, da den tidsafledte af $G(t)x$ er $G(t)Bx$, når $x \in \mathcal{D}(B)$, så giver (1.2) at

$$G(t)x - x = \int_0^t G(s)Bx\,ds. \tag{3.5}$$

Før vi kan kæde infinitesimale frembringere og semigrupper tættere sammen end differentation, skal vi se på nogle af den infinitesimale frembringers andre egenskaber. Fx kan vi fra blot kontinuiteten af $G(t)$ og (a) vise følgende lemma, der sammen med (3.5) senere bliver vigtig i bestemmelsen af B's resolventmængde.

Lemma 3.4. *For alle $x \in X$ gælder, at $\int_0^t G(s)x\,ds$ tilhører $\mathcal{D}(B)$, og der gælder at*

$$G(t)x - x = B\int_0^t G(s)x\,ds. \tag{3.6}$$

Bevis. Som nævnt, så gælder der fra kontinuiteten af $G(t)$ og semigruppeegenskaben (a), at

$$\begin{aligned}
\frac{G(h)-I}{h}\int_0^t G(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t G(s+h)x - G(s)x\,ds\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t G(s+h)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t G(s)x\,ds\\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t G(s)x\,ds\\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_h^t G(s)x\,ds + \frac{1}{h}\int_h^t G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t G(s)x\,ds\\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\left(\int_0^t G(s)x\,ds - \int_h^t G(s)x\,ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds.
\end{aligned}$$

Hvor første lighed er givet af (a) og de to sidste ligheder kommer af kontinuiteten af $G(t)$. Tredje lighed er givet af Riemann-integralets translationsinvarians. Translationsinvarians er ikke vist, men beviset fra $\mathbb{R}$ kan blot kopieres direkte.

Fra (1.3) konvergerer højresiden mod $G(t)x - x$ og venstresiden mod $B\int_0^t G(s)x\,ds$ for $h \to 0$. Dermed er det ønskede vist. □

Ovenstående lemma kan nu bruges til at vise to gode egenskaber ved den infinitesimale frembringer B. Nemlig at B er *afsluttet* og *tæt defineret*.

Bevis. Fra Lemma 3.4 er $\frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds \in \mathcal{D}(B)$ for alle $x \in X$ og $h > 0$. Da dette går mod x for $h \to 0$ er $\mathcal{D}(B)$ tæt i X.

For at vise, at B er afsluttet bruges Lemma 2.2. Lad derfor $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(B)$ være en følge sådan $x_n \to x$ og $Bx_n \to y$ for $n \to \infty$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet samt $t > 0$, da er

$$\|G(t)Bx_n - G(t)y\| = \|G(t)(Bx_n - y)\| \le \|Bx_n - y\|$$

fra (c). Det betyder altså, at der findes et $N \in \mathbb{N}$ sådan, at når $n \ge N$ er

$$\|G(t)Bx_n - G(t)y\| \le \|Bx_n - y\| < \varepsilon.$$

Altså konvergerer $G(t)Bx_n$ uniformt mod $G(t)y$ i t. Det skal vi udnytte til at vise følgende for hvert $h > 0$:

$$\frac{G(h)x - x}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(h)x_n - x_n}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h G(t)Bx_n\, dt = \frac{1}{h} \int_0^h G(t)y\, dt,$$

hvor første lighed kommer af at $x_n \to x$, anden lighed da $x_n \in \mathcal{D}(B)$ og (3.5), og sidste lighed af den uniforme konvergens.

Da nu $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h G(t)y\, dt = G(0)y = y$ eksisterer i X og er lig $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(G(h)x - x)$ så er x per definition i $\mathcal{D}(B)$ og $Bx = y$. Dermed er B en lukket operator. □

Vi er nu i stand til at slå fast, at den infinitesimale frembringer siger meget mere om semigruppen, end blot, hvad den tidsafledte af semigruppen er i $t = 0$. Den egenskab, der gør den infinitesimale frembringer unik, er, at den entydigt bestemmer kontraktionssemigruppen, som den er defineret fra.

Lemma 3.5. *En stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe er entydigt bestemt ved sin infinitesimale frembringer.*

Bevis. Antag at $G_1(t)$ og $G_2(t)$ har samme infinitesimale frembringer B. For $x \in \mathcal{D}(B)$ er $G_2(t)x \in \mathcal{D}(B)$, og ved brug af Leibniz' formel (Proposition A.5) er

$$\frac{d}{ds} G_1(t-s)G_2(s)x = -G_1(t-s)BG_2(s)x + G_1(t-s)G_2(s)Bx = 0.$$

Ved integration over intervaller $[0, t]$ fås derfor fra (1.2), at

$$G_1(0)G_2(t)x - G_1(t)G_2(0)x = 0 \Rightarrow G_1(t)x = G_2(t)x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(B).$$

Da $\mathcal{D}(B)$ er tæt i X og da $G_1(t)$ og $G_2(t)$ er begrænsede, kan ligheden udvides til hele X, hvormed $G_1(t) = G_2(t)$. □

En interessant størrelse, der endnu ikke er behandlet, er resolventmængden af B – eller med andre ord, er der bestemte delmængder af $\mathbb{C}$ hvor $(B - \lambda I)^{-1}$ altid er en bijektion af $\mathcal{D}(B)$ på X? Svaret findes i følgende sætning, der samtidig binder B og $G(t)$ endnu tættere sammen.

Sætning 3.6. *Lad $G(t)$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe med frembringer B. Når $\operatorname{Re}\lambda > 0$ er $\lambda \in \rho(B)$, og*

$$(B - \lambda I)^{-1}x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x\, dt \quad \textit{for} \quad x \in X. \tag{3.7}$$

Yderligere gælder, at

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \le (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}. \tag{3.8}$$

Bevis. Lad først og fremmest $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Pointen er at se på operatorerne $e^{-\lambda t}G(t)$, $t \ge 0$, der udgør en stærkt kontinuert semigruppe af kontraktionsoperatorer, og derefter bruge de foregående lemmaer til at give (3.7). Vurderingen falder nemt ud af (3.7).

Vi viser først at operatorerne $e^{-\lambda t}G(t)$, $t \ge 0$, udgør en stærkt kontinuert semigruppe af kontraktionsoperatorer (altså opfylder (a) – (c)) med infinitesimal frembringer $B - \lambda I$.

(a) fås ved direkte indsætning, samt at $G(t)$ kommuterer med skalaren $e^{-\lambda t}$. (b) er klar fordi $e^{-\lambda t} \to 1$ for $t \to 0^+$, så $e^{-\lambda t}G(t)x \to x$ for $t \to 0^+$ for alle $x \in X$. (c) er givet fordi $\left|e^{-\lambda t}\right| \le 1$ når $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$.

Hvad er den infinitesimale frembringer for denne semigruppe? Forfølges den intuitive fortolkning med, at den infinitesimale frembringer er den tidsafledte af semigruppen evalueret i 0, så ses det klart at $B-\lambda I$ netop er den infinitesimale frembringer for semigruppen $e^{-\lambda t}G(t)$, $t \geq 0$. Men det er ikke helt stringent nok. Vi må derfor se på grænseværdien af følgende

$$\frac{1}{h}(e^{-\lambda h}G(h) - I)x = e^{-\lambda h}\frac{G(h)x - x}{h} + \frac{e^{-\lambda h} - I}{h}x.$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{-\lambda h}G(h) - I)x &= \lim_{h\to 0} e^{-\lambda h}\frac{G(h)x - x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\lambda h} - I}{h}x \\ &= \lim_{h\to 0} e^{-\lambda h}\lim_{h\to 0}\frac{G(h)x - x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\lambda h} - I}{h}x \\ &=(B - \lambda I)x,\end{aligned}$$

og grænseværdien eksisterer i X for alle $x \in \mathcal{D}(B)$. Dermed er det vist, at $e^{-\lambda t}G(t)$, $t \geq 0$, er en stærkt kontinuert semigruppe af kontraktionsoperatorer med infinitesimale frembringer $B - \lambda I$.

Bruges (3.5) og Lemma 3.4 på denne semigruppe fås at

$$e^{-\lambda s}G(s)x - x = (B - \lambda I)\int_0^s e^{-\lambda t}G(t)x\,dt \quad \text{for} \quad x \in X, \tag{3.9}$$

$$e^{-\lambda s}G(s)x - x = \int_0^s e^{-\lambda t}G(t)(B - \lambda I)x\,dt \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(B). \tag{3.10}$$

Lad nu $y \in X$, og definer den lineære operator T i X, som

$$Ty = \lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-\lambda t}G(\lambda)y\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)y\,dt.$$

T – eller rettere $-T$ – er kandidat til at være den operator, der skal give den inverse til $(B - \lambda I)$, og altså være den operator der er givet ved (3.7). Hvis T skal være en invers til en ubegrænset operator, skal T i hvert fald være begrænset.

$$\begin{aligned}\|Ty\| &= \|\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)y\,dt\| \leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|G(t)y\|\,dt \\ &\leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|G(t)\|\|y\|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|y\|\,dt \\ &= \|y\|(-\operatorname{Re}\lambda^{-1}e^{-\operatorname{Re}\lambda t})\Big|_0^\infty = \|y\|\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.\end{aligned}$$

Altså er $\|T\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$ og T er begrænset. Når nu ligeledes $\operatorname{Re}\lambda > 0$, så er

$$\|e^{-\lambda t}G(t)x\| \leq e^{-\operatorname{Re}\lambda t}\|x\| \to 0 \quad \text{for} \quad t \to \infty.$$

Da giver (3.9) ved grænseovergang, at

$$-x = (B - \lambda I)Tx \quad \text{for} \quad x \in X,$$

og (3.10) giver ligeledes ved grænseovergang, at

$$-x = T(B - \lambda I)x \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(B).$$

Dermed ses det, at $-T = (B - \lambda I)^{-1}$ og specielt at λ er i resolventmængden for B. Da $\|T\| = \|-T\| = \|(B - \lambda I)^{-1}\|$ er uligheden også vist. $\square$

Infinitesimale frembringere har altså nogle ganske gode egenskaber. Den hidtidige gennemgang lader dog stå tilbage at fortælle, hvilke operatorer, der så rent faktisk er infinitesimale frembringere for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe – og ikke mindst hvordan den entydigt bestemte semigruppe fra en infinitesimal frembringer konstrueres. Svaret skal findes i Hille–Yoshidas sætning.

3.2 Hille–Yoshidas sætning

Sætning 3.7 (Hille–Yoshidas sætning)**.** *En tæt defineret, afsluttet operator, B, i X (et Banachrum) er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe hvis og kun hvis $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$ og*

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq \lambda^{-1} \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{3.11}$$

Som det bliver beskrevet senere, så kan Hille–Yoshidas sætning benyttes til at finde løsninger på abstrakte Cauchyproblemer: $u'(t) = Bu(t)$ med $u(0) = u_0$. Hvor $u(t)$ er en funktion, der tager Banachrumsværdier og B er en operator. Hvis B var en konstant og u en kompleks funktion, så ville $u(t) = u_0 \exp(tB)$ løse problemet. Det samme forsøger vi at give mening til når B er en vilkårlig ubegrænset operator. Spørgsmålet er blot, hvordan vi skal fortolke $\exp(tB)$, når B er en ubegrænset operator. Vi kunne umiddelbart forsøge at efterligne konstruktionen i det følgende lemma: For begrænsede operatorer defineres

$$\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n,$$

men da den infinitesimale frembringer ikke generelt er begrænset, så er det urealistisk at summen vil konvergere i stærk operator topologi eller norm-topologi, hvis B er ubegrænset. Men fra det følgende lemma har vi ret godt styr på $\exp(tB_n)$ når B_n er begrænset.[3] Vi kan fx forsøge at approksimere $\exp(tB)$ med en følge $(\exp(tB_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Vi sætter derfor

$$\exp(tB) = \lim_{n\to\infty} \exp(tB_n)$$

og håber på, at hvis følgen $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er valgt rigtigt, så eksisterer grænseværdien mht. stærk operatortopologi, og er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe. Dette er netop grundideen og substansen af beviset for Hille–Yoshidas sætning. Men inden da, et lille lemma, der viser hvorfor denne tilgang muligvis har en gang på jord.

Lemma 3.8. *Lad B være en begrænset operator på et Banachrum X, og $t \in \mathbb{R}$. Da er*

$$\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tB)^n \tag{3.12}$$

veldefineret mht operatornormen, og der gælder at

$$\|\exp(tB)\| \leq \exp(|t| \, \|B\|).$$

Bevis. For hvert $t \in \mathbb{R}$ er (3.12) veldefineret, fordi rækken konvergerer absolut i operatornormen mod en begrænset operator: Da $0 \leq \|tB\|^n \leq |t|^n \|B\|^n$ og

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |t|^n \|B\|^n = \exp(|t| \, \|B\|) < \infty$$

[3] Se yderligere Appendiks A.4

fordi B er begrænset, er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|tB\|^n < \infty.$$

Dermed er $\exp(tB)$ absolut konvergent i operatornormen. Da $\mathcal{B}(X)$ er et Banachrum er $\exp(tB)$ også konvergent i operatornormen:

Lad $\varepsilon > 0$ være givet, og lad $S_m = \sum_{k=1}^{m} (k!)^{-1}(tB)^k$.

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}(tB)^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}\|tB\|^k < \varepsilon$$

for $n, m \geq N$ da $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1}\|tB\|^n$ er konvergent. Altså er afsnitsfølgen S_n en Cauchyfølge, som er konvergent fordi $\mathcal{B}(X)$ er et Banachrum.

□

Vi har nu set, at $\exp(tB)$ er veldefineret når B er en begrænset operator, og vi viser nu Hille–Yoshidas sætning med ovenstående fremgangsmåde.

Bevis. Nødvendigheden i sætningen kommer direkte fra (3.8), hvor λ blot er positiv.

Lad $\lambda > 0$, og definer operatoren

$$B_\lambda = -\lambda^2(B - \lambda I)^{-1} - \lambda I.$$

Da $\|B_\lambda\| \leq \lambda^2\|(B - \lambda I)^{-1}\| + \lambda \leq 2\lambda$ er B_λ begrænset og fra Lemma 3.8 kan vi nu lave operatorfamilierne

$$G_\lambda(t) = \exp(tB_\lambda) \quad \text{for } t \in \mathbb{R},$$

som Sætning A.7 giver er kontinuerte i t mht. operatornormen.

Lad nu $x \in \mathcal{D}(X)$. Da har vi, at

$$\lambda(B - \lambda I)^{-1}x + x = (B - \lambda I)^{-1}(\lambda x + (B - \lambda I)x) = (B - \lambda I)^{-1}Bx, \tag{3.13}$$

er

$$\|\lambda(B - \lambda I)^{-1}x + x\| = \|(B - \lambda I)^{-1}Bx\| \leq \lambda^{-1}\|Bx\| \to 0 \text{ for } \lambda \to \infty. \tag{3.14}$$

Altså har vi, at for $x \in \mathcal{D}(B)$ vil $-\lambda(B - \lambda I)^{-1}x \to x$ for $\lambda \to \infty$ i Banachrumsnormen. Men da $\|-\lambda(B - \lambda I)^{-1}\| \leq 1$ er $-\lambda(B - \lambda I)^{-1}$ begrænset og da $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B - \lambda I)$ er $-\lambda(B - \lambda I)^{-1}$ yderligere tæt defineret. Altså kan vi udvide konvergensen til hele X, og for $x \in \mathcal{D}(B)$ har vi, at

$$B_\lambda x = -\lambda^2(B - \lambda I)^{-1}x - \lambda x = -\lambda(\lambda(B - \lambda I)^{-1}x + x) = -\lambda(B - \lambda I)^{-1}Bx.$$

Det er nødvendigt at udvide konvergensen af $-\lambda(B - \lambda I)^{-1}x \to x$ til hele X for at kunne bruge den på Bx, da Bx ikke nødvendigvis er i $\mathcal{D}(B)$. Vi bruger nu konvergensen på Bx og får at for alle $x \in \mathcal{D}(B)$, vil

$$B_\lambda x \to Bx \text{ for } \lambda \to \infty. \tag{3.15}$$

Resten af beviset går nu ud på, at vise, at $G_\lambda(t)$ konvergerer mod en semigruppe $G(t)$ med B som frembringer, når $\lambda \to \infty$.

Først ser vi, at da $(B - \lambda I)^{-1}$ og I er begrænsede operatorer, så giver Sætning A.6, at

$$G_\lambda(t) = \exp(tB_\lambda) = \exp(-\lambda^2(B - \lambda I)^{-1}t)\exp(-\lambda t),$$

har mening og er veldefineret, og da

$$\begin{aligned}\|\exp(-\lambda^2(B-\lambda I)^{-1}t)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|-\lambda^2(B-\lambda I)^{-1}t\|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

pr. (3.11), er

$$\|G_\lambda(t)\| \leq \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t) = 1 \quad \text{for alle } t \geq 0 \text{ og } \lambda > 0. \tag{3.16}$$

Operatorerne $B_\lambda, B_\mu, G_\lambda(t), G_\mu(s)$ for $\lambda, \mu > 0$ og $t, s \geq 0$ er begrænsede, og af Proposition 3.3 kommuterer B_λ med $G_\lambda(t)$ og B_μ med $G_\mu(s)$. Da $B_\lambda x = \lim_{h\to 0} h^{-1}(G_\lambda(h)-I)x$ er det klart at B_λ og $G_\mu(s)$ kommuterer, hvis $G_\lambda(t)$ og $G_\mu(s)$ kommuterer. Ligeledes vil da også B_μ og $G_\lambda(t)$ kommutere. Men da $G_\lambda(t)G_\mu(s) = \exp(tB_\lambda)\exp(sB_\mu) = \exp(tB_\lambda + sB_\mu) = \exp(sB_\mu)\exp(tB_\lambda) = G_\mu(s)G_\lambda(t)$ fra Sætning A.6, kommuterer $G_\lambda(t)$ og $G_\mu(s)$.

At B_λ og B_μ kommuterer med $G_\lambda(t)$, $G_\mu(t)$ er særdeles anvendeligt, hvis vi bruger Leibniz produktformel for differentation på produktet $G_\lambda(s)G_\mu(t-s)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(G_\lambda(s)G_\mu(t-s)) &= G_\lambda(s)B_\lambda G_\mu(t-s) - G_\lambda(s)B_\mu G_\mu(t-s) \\ &= G_\lambda(s)G_\mu(t-s)B_\lambda - G_\lambda(s)G_\mu(t-s)B_\mu \\ &= G_\lambda(s)G_\mu(t-s)(B_\lambda - B_\mu).\end{aligned}$$

Det betyder nemlig, at hvis vi integrerer fra 0 til t mht. s, får vi

$$G_\lambda(t) - G_\mu(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}(G_\lambda(s)G_\mu(t-s))\,ds = \int_0^t G_\lambda(s)G_\mu(t-s)(B_\lambda - B_\mu)\,ds,^{4}$$

hvorfor vi pr (3.16) har at

$$\begin{aligned}\|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| &\leq \int_0^t \|G_\lambda(s)G_\mu(t-s)(B_\lambda - B_\mu)x\|\,ds \\ &\leq t\|B_\lambda x - B_\mu x\| \quad \text{for} \quad x \in X.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Vi vil nu gerne lade μ gå mod ∞ for at kunne sige noget om konvergensen af $G_\lambda(t)x$ for $\lambda \to \infty$. Men da må vi i første omgang indskrænke os til at se på $x \in \mathcal{D}(B)$. For fra (3.15) har vi, at når $x \in \mathcal{D}(B)$ vil $B_\mu x \to Bx$ for $\mu \to \infty$. Altså er $\{B_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy-følge i X, og til et givet $\varepsilon > 0$ findes altså et $N \in \mathbb{N}$, så $\|B_n x - B_m x\| < \varepsilon/t$ for $n, m \geq N$. Sammen med (3.17) betyder dette, at der findes et $N \in \mathbb{N}$, så $\|G_n(t)x - G_m(t)x\| < \varepsilon$ for $n, m \geq N$. Altså er $\{G_n(t)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy-følge i X, når $x \in \mathcal{D}(B)$. Da X er et Banachrum findes grænseværdien, og den betegnes $G(t)x$.

Lader vi nu μ gå mod ∞ i (3.17) så har vi

$$\|G_\lambda(t)x - G(t)x\| \leq t\|B_\lambda x - Bx\| \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(B). \tag{3.18}$$

I (3.18) kan t vurderes mindre end et positivt tal a, og nøjes vi med at se på det begrænsede interval $[0, a]$, har vi en vurdering på forskellen mellem $G_\lambda(t)x$ og $G(t)x$, som er uafhængig

[4] Det kan bemærkes, at integralet her, ikke er det samme som er brugt tidligere, da integrationen nu ikke længere er i Banachrummet X men i Banachrummet $\mathcal{B}(X)$ af begrænsede operatorer på X.

af t. Det betyder at $G_\lambda(t)x \to G(t)x$ for $\lambda \to \infty$ uniformt for t i det begrænsede interval $[0, a]$.

Fra (3.16) har vi at $\|G_\lambda(t)x\| \leq \|x\|$ for $t \geq 0$ og $\lambda > 0$, så vil det samme gælde for grænseværdien, altså $\|G(t)x\| \leq \|x\|$ når $x \in \mathcal{D}(B)$. Vi har nu en begrænset operator $x \mapsto G(t)x$, med norm ≤ 1, defineret på en tæt delmængde af X; så vi kan udvide den til hele X. Udvidelsen vil også betegnes $G(t)$ og er en kontraktionsoperator på X.

Vi har fået udvidet vores grænseoperator $G(t)$ til hele X, men vi må nødvendigvis eftervise, at den uniforme konvergens, når $x \in \mathcal{D}(B)$, også har overlevet til hele X. Lad $x \in X$ være givet, da $\mathcal{D}(B)$ er tæt i X kan vi vælge en følge, $\{x_k\} \subset \mathcal{D}(B)$, der konvergerer mod x i Banachrumsnormen. Når $t \in [0, a]$ har vi, at

$$\begin{aligned}\|G_\lambda(t)x - G(t)x\| &= \|G_\lambda(t)x - G_\lambda(t)x_k + G_\lambda(t)x_k - G(t)x_k + G(t)x_k - G(t)x\| \\ &\leq \|G_\lambda(t)(x - x_k)\| + \|G_\lambda(t)x_k - G(t)x_k\| + \|G(t)(x - x_k)\| \\ &\leq 2\|x - x_k\| + a\|B_\lambda x_k - Bx_k\|.\end{aligned}$$

Det betyder, at hvis vi vælger x_k tæt på x, og lader $\lambda \to \infty$ så går højresiden mod 0 for $\lambda \to \infty$ – uafhængigt af t. Dermed overlever $G_\lambda(t)x$'ernes uniforme konvergens udvidelsen til hele X.

Tilbage er nu at vise, at $G(t)$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe og at dens infinitesimale frembringer rent faktisk er B. At normen er mindre end 1 har vi vist, så (c) er opfyldt. Semigruppeegenskaben (a) bliver givet til $G(t)$ fra $G_\lambda(t)$'erne:

$$G(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} G_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} Ix = Ix \quad \text{for alle } x \in X,$$

altså er $G(0) = I$. Det næste er så, at $G(t + s) = G(t)G(s)$ for alle $t, s \geq 0$. Lad derfor $t, s \geq 0$ være givet, og så findes et $a > s + t$, og vi kan derfor bruge $G_\lambda(t)$'ernes uniforme konvergens:

$$G(t + s)x = \lim_{\lambda \to \infty} G_\lambda(t + s)x = \lim_{\lambda \to \infty} G_\lambda(t)G_\lambda(s)x = G(t)G(s)x \quad \text{for alle } x \in X,$$

så $G(s + t) = G(s)G(t)$. Dermed er semigruppeegenskaben vist.

Vi skal nu vise egenskab (b): $G(t)x \to x$ for $t \to 0^+$ for alle $x \in X$. Trekantsuligheden giver, at

$$\|G(t)x - x\| \leq \|G(t)x - G_\lambda(t)x\| + \|G_\lambda(t)x - x\|.$$

Lad først t være i $[0, 1]$. Vi kan vælge λ så stor at $\|G(t)x - G_\lambda(t)x\| < \varepsilon$. Hvis vi bagefter lader $t \to 0$, så vil $G_\lambda(t)x \to Ix = x$, hvormed vi har, at $G(t)x \to x$ når $t \to 0^+$ for alle $x \in X$.

Vi har nu fået konstrueret en semigruppe. Denne har en infinitesimal frembringer, C. Vi skal nu se, at $C = B$. Det gøres ved at vise, at $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(C)$ og $Cx = Bx$ for $x \in \mathcal{D}(B)$. Har vi først det, giver Sætning 3.6, at for ethvert fast $\lambda > 0$ er $B - \lambda I$ og $C - \lambda I$ pr. definition bijektioner af hhv. $\mathcal{D}(B - \lambda I) = \mathcal{D}(B)$ og $\mathcal{D}(C - \lambda I) = \mathcal{D}(C)$ på X. Da der for ethvert $x \in X$ findes netop et $x' \in \mathcal{D}(C)$ så $(C - \lambda I)x' = x$, og samtidig findes netop et $x'' \in \mathcal{D}(B)$ så $(B - \lambda I)x'' = x = (C - \lambda I)x'$, er $x'' = x'$ og $x' \in \mathcal{D}(B)$, fordi $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(C)$. Altså er $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(B)$. Derfor er $\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(B)$, og da $Cx = Bx$ for $x \in \mathcal{D}(C)$ er $C = B$.

Lad derfor $x \in \mathcal{D}(B)$. Da vi har, at $B_\lambda x \to Bx$ for $\lambda \to \infty$ når $x \in \mathcal{D}(B)$, og yderligere $G_\lambda(s)y$'s uniforme konvergens for s i et begrænset interval for hvert $y \in X$, gælder, at

$$\begin{aligned}\|G_\lambda(s)B_\lambda x - G(s)Bx\| &\leq \|G_\lambda(s)\|\|B_\lambda x - Bx\| + \|(G_\lambda(s) - G(s))Bx\| \\ &\leq \|B_\lambda x - Bx\| + \|(G_\lambda(s) - G(s))Bx\| \to 0 \quad \text{for } \lambda \to \infty.\end{aligned}$$

Fra (3.5), og uniform kontinuitet i s på et begrænset interval, har vi for $x \in \mathcal{D}(B)$, at

$$h^{-1}(G(h)x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} h^{-1}(G_\lambda(h)x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} h^{-1}\int_0^h G_\lambda(s)B_\lambda x\,ds = h^{-1}\int_0^h G(s)Bx\,ds.$$

Lader vi nu $h \to 0$, ses det, at højresiden går mod $G(0)Bx = Bx$ (givet af 'middelværdisætningen' (1.3)), og venstresiden går mod Cx, hvis $x \in \mathcal{D}(C)$. Dermed kan vi slutte, at for $x \in \mathcal{D}(C)$ er $Cx = Bx$. □

Hille–Yoshidas sætning kan generaliseres til semigrupper, der ikke blot indeholder kontraktionsoperatorer. Der findes naturligvis den oplagte udvidelse, der til operatoren $B + \lambda I$ associerer semigruppen $\exp(t(B+\lambda I)) = \exp(t\lambda)\exp(tB)$, som kun er kontraktioner når $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. Flere generalisationer vil ikke blive behandlet her. I stedet specialiserer vi nu behandlingen til Hilbertrum.

3.3 I et Hilbertrum

Behandlingen gøres nu mere konkret ved at lade X være et Hilbertrum, kaldet H. Sigtet med dette er, entydigt at kunne afgøre, hvornår en operator er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer. Hovedmålet er altså at bruge teorien for semigrupper til at give et klassisk resultat for grupper: Stones sætning.

Inden da, er det nødvendigt med følgende observation:

Lemma 3.9. *Når $G(t)$ er en semigruppe i H, der opfylder (a), (b) og (c), er B opad halvbegrænset og med øvre grænse ≤ 0.*

Bevis. For $x \in X$ er

$$\operatorname{Re}(h^{-1}\langle G(h)x - x, x\rangle) = h^{-1}(\operatorname{Re}\langle G(h)x, x\rangle - \|x\|^2) \le h^{-1}(\|G(h)x\|\|x\| - \|x\|^2) \le 0,$$

hvor sidste ulighed er givet fordi $G(t)$ er en kontraktionsoperator. Hvis undersøgelsen begrænses til $\mathcal{D}(B)$ så gælder der, ved grænseovergang, at

$$\operatorname{Re}\langle Bx, x\rangle \le 0 \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{D}(B).$$

Specielt er så $\operatorname{Re}\langle -Bx, x\rangle = -\operatorname{Re}\langle Bx, x\rangle \ge 0$, hvormed $m(B) > -\infty$, og B er opad halvbegrænset. Der gælder naturligvis også, at $-m(-B) \le 0$, hvormed den øvre grænse for B er mindre end 0. □

Nu er vi klar til Stones sætning.

3.4 Stones sætning

Sætning 3.10 (Stones sætning)**.** *En tæt defineret operator B i et hilbertrum H er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer, hvis og kun hvis B er skævselvadjungeret.*

Bevis. Vi begynder med at vise, at hvis vi har en skævselvadjungeret operator B,[5] så er den infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer.

[5] Det er naturligvis underforstået at B er tæt defineret; ellers giver det ikke mening at tale om den adjungerede.

Det gør vi via Hille–Yoshidas sætning, der bruges til at skabe to semigrupper fra B og $-B$, der sammensættes til en gruppe. Vi skal derfor vise, at B og $-B$ opfylder kravene i Hille–Yoshidas sætning.

For B skævselvadjungeret gælder, når $x \in \mathcal{D}(B)$, at

$$\langle Bx, x\rangle = \langle x, B^*x\rangle = -\langle x, Bx\rangle = -\overline{\langle Bx, x\rangle},$$

hvormed

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle Bx, x\rangle = \langle Bx, x\rangle + \overline{\langle Bx, x\rangle} = 0,$$

og $\langle Bx, x\rangle$ er rent imaginær for $x \in \mathcal{D}(B)$.

Vi vælger nu et $\lambda > 0$, og ser på $f = (\lambda I \pm B)x$:

$$\lambda \langle x, x\rangle = \mathrm{Re}\,\langle f, x\rangle \quad \text{fordi} \quad \langle (\lambda I \pm B)x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle \pm \langle Bx, x\rangle\,.$$

Det betyder, at

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda \langle x, x\rangle = \mathrm{Re}\,\langle f, x\rangle \leq |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| = \|(\lambda I \pm B)x\|\|x\|,$$

og dermed at

$$\|x\| \leq \|(\lambda I \pm B)x\|\lambda^{-1}.$$

Da $\lambda > 0$ har vi at $(\lambda I \pm B)$ er injektiv, fordi der for en lineær operator gælder, at hvis $\|x\| \leq \|Tx\|$ for alle $x \in \mathcal{D}(T)$, så er T injektiv, pr. samme argumentation som beviset for Sætning 2.3.1.

Da B er tæt defineret er $B^* = -B$ afsluttet, hvorfor B er afsluttet.

Vi vil også gerne have at $\mathcal{R}(\lambda I \pm B)$ er afsluttet. Sætning 2.3.2 giver os dette, hvis blot $m(\lambda I \pm B) > \lambda$. Da

$$\mathrm{Re}\,\langle (\lambda I \pm B)x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle > 0 \quad \text{for } x \neq 0,$$

er $m(\lambda I \pm B) > 0$.

Men $\mathcal{D}(B)$ er tæt i H, og da $\lambda I \pm B$ er injektiv, så er $R(\lambda I \pm B)$ tæt i H, og da $R(\lambda I \pm B)$ er afsluttet er $R(\lambda I \pm B) = H$. Men da $H = R(\lambda I \pm B) = R(B \mp \lambda I)$ og $\|B \mp \lambda I\| \leq \lambda^{-1}$, og $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$, så giver Hille–Yoshidas sætning, at B er infinitesimal frembringer for en stærk kontinuert kontraktionssemigruppe $\{U_+(t), t \geq 0\}$. Da der ligeledes gælder at $(\lambda I + B)^{-1} = -(-B - \lambda I)^{-1}$ er $\mathbb{R}_+ \subset \rho(-B)$, og $-B$ frembringer, igen fra Hille–Yoshidas sætning, en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $\{U_-(t), t \geq 0\}$.

Vi mangler nu at vise to ting

- At hver af de to semigrupper består af unitære operatorer, dvs. at operatorerne er isometriske og surjektive.
- At vi kan koge de to semigrupper sammen til en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer, med infinitesimal frembringer B.

Vi viser først at operatorerne er isometriske. For $x \in \mathcal{D}(B)$ gælder,

$$\frac{d}{dt}\|U_\pm(t)x\|^2 = \langle \pm BU_\pm(t)x, U_\pm(t)x\rangle + \langle U_\pm(t)x, \pm BU_\pm(t)x\rangle = 0,$$

da B er skævselvadjungeret. Her har vi brugt Leibniz' regel for differentiation (Proposition A.5). Altså er $\|U_\pm(t)x\|$ konstant i t. Men da $\|U_\pm(0)x\| = \|x\|$ er $\|U_\pm(t)x\| = \|x\|$ for

$x \in \mathcal{D}(B)$. Da $\mathcal{D}(B)$ er tæt i H, kan identiteten udvides til hele H, hvormed det ses at semigrupperne består af isometriske operatorer.

Vi skal nu vise, at operatorerne er surjektive, og det viser vi på næsten samme måde, ved først at lade $x \in \mathcal{D}(B)$. Bruger vi igen Leibniz' differentiationsregel, så er

$$\frac{d}{dt}U_+(t)U_-(t)x = U_+(t)BU_-(t) + U_+(t)(-B)U_-(t) = 0,$$

så $U_+(t)U_-(t)x$ er konstant i t når $x \in \mathcal{D}(B)$. Da $\mathcal{D}(B)$ er tæt i H udvides dette til hele H, og da $U_+(0)U_-(0)x = x$ for alle $x \in H$, er $U_+(t)U_-(t) = I$, hvormed U_+ er surjektiv for alle $t \geq 0$. På samme måde kan det vises, at da

$$\frac{d}{dt}U_-(t)U_+(t)x = 0 \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(B),$$

er $U_-(t)U_+(t) = I$, hvormed $U_-(t)$ er surjektiv for alle $t \geq 0$. Semigrupperne består altså af unitære operatorer.

Vi skal nu samle de to semigrupper til en gruppe, og tjekke, at gruppen er stærkt kontinuert og har B som frembringer. Vi definerer

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & \text{for } t \geq 0 \\ U_-(-t) & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

At gruppen er stærkt kontinuert betyder, at $U(t)x$ er stærkt kontinuert fra $t \in \mathbb{R}$ ind i H. Men det kommer direkte fra kontinuiteten for $t \geq 0$ og $t \leq 0$.

At gruppeegenskaben holder, er klart i tilfældene hvor $s, t \geq 0$ og $s, t \leq 0$. Da giver semigruppeegenskaben at $U(s+t) = U(s)U(t)$. Hvis $s \geq 0 \geq t$, så gælder der enten at

- $0 \geq t \geq -s$: Da $s + t \geq 0$ og $-t \geq 0$, så er

  $$U(s)U(t) = U(s+t)U(-t)U(t) = U(s+t).$$

  fordi $U_+(-t)U_-(-t) = I$ for $t \leq 0$.

- $-t \geq s \geq 0$: Da $s + t \leq 0$ og $-s \leq 0$, så er

  $$U(s)U(t) = U(s)U(-s)U(s+t) = U(s+t).$$

  fordi $U_+(s)U_+(s) = I$ for $s \geq 0$.

Dermed er gruppeegenskaben vist.

Vi mangler nu blot, at B er den infinitesimale frembringer for gruppen. Gruppens infinitesimale frembringer er den operator der opfylder Definition 3.2, hvor grænseværdien gælder fra både højre og venstre. Da B er infinitesimal frembringer for $U_+(t)$ ser vi ikke på grænseværdien fra højre. Vi ved, at den er Bx. I stedet ses på grænseværdien fra venstre.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{U(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{U(-h)x - x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{U_-(h)x - x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} U_-(h)\frac{U_+(h)x - x}{h} = Bx.$$

Dermed er det ønskede vist.

Vi skal nu vise den modsatte implikation. Men vi viser dog noget mere: Vi viser, at hvis vi har en stærkt kontinuert gruppe af kontraktioner, så er den infinitesimale frembringer skævselvadjungeret. Bemærk, at der ikke er noget krav om at kontraktionerne skal være unitære. Kan vi at den infinitesimale frembringer er skævselvadjungeret, giver ovenstående udledning, at operatorerne automatisk er unitære, hvilket afslutter beviset for Stones sætning.

Lad nu $U(t)$ være en stærkt kontinuert gruppe af kontraktioner. Denne gruppe splitter vi nu op i to semigrupper $\{U(t), t \geq 0\}$ og $\{U(-t), t \geq 0\}$, der hver har frembringerne hhv. B og C. For $x \in \mathcal{D}(B)$ har vi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{U(-h) - I}{h} x = \lim_{h \to 0^+} -U(-h) \frac{U(h) - I}{h} x = -Bx.$$

Men hvis $\lim_{h \to 0^+} \frac{U(-h)-I}{h} x$ eksisterer, så er $\lim_{h \to 0^+} \frac{U(-h)-I}{h} x = Cx$. Altså har vi for $x \in \mathcal{D}(B)$, at $Cx = -Bx$, hvormed $-B \subset C$.

Tilsvarende har vi for $x \in \mathcal{D}(C)$, at

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{U(h) - I}{h} x = \lim_{h \to 0^+} -U(h) \frac{U(-h) - I}{h} x = -Cx,$$

hvormed $-Cx = Bx$ for $x \in \mathcal{D}(C)$ så $-C \subset B$, og $B = -C$.

Vi ønsker at bruge Sætning 2.4 til at give at iB er selvadjungeret, for så er B nemlig skævselvadjungeret. For at kunne bruge sætningen, skal iB være symmetrisk. Proposition A.4 giver at S er symmetrisk hvis og kun hvis $m(iS) = m(-iS) = 0$. Hvis vi vil se, at iB er symmetrisk, skal vi altså vise at $m(C) = m(-B) = 0 = m(B)$.

Lemma 3.9 giver at $m(B) \geq 0$, hvormed den øvre grænse for $B = -C$ er mindre end 0. Altså er $-m(C) \leq 0$. Men der gælder også at

$$\begin{aligned} 0 \geq -m(C) &= -\inf\{\operatorname{Re}\langle Cx, x\rangle \,:\, x \in \mathcal{D}(C), \|x\| = 1\} && (3.19)\\ &= \sup\{-\operatorname{Re}\langle Cx, x\rangle \,:\, x \in \mathcal{D}(C), \|x\| = 1\} && (3.20)\\ &= \sup\{\operatorname{Re}\langle -Cx, x\rangle \,:\, x \in \mathcal{D}(-C), \|x\| = 1\}. && (3.21) \end{aligned}$$

Da infimum er mindre end supremum, er

$$0 \geq \inf\{\operatorname{Re}\langle -Cx, x\rangle, x \in \mathcal{D}(-C), \|x\| = 1\} = m(-C) = m(B),$$

og altså $m(B) = 0$. På samme måde kan Lemma 3.9 give at $m(C) \geq 0$ og samme regnerier som ovenfor giver at $m(C) = 0$.

For at bruge Sætning 2.4, skal vi vise at $iB + iI$ og $iB - iI$ er surjektive. Men det vil de netop være, hvis $\pm 1 \in \rho(B)$, fordi

$$R(iB \pm iI) = R(i(B \pm I)) = R(B \pm I).$$

Sætning 3.6 giver os, at $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(B)$ og $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(C)$. Men hvis $\operatorname{Re}(-\lambda) > 0$, så gælder, for alle $x \in H$, at

$$(-B-\lambda I)^{-1}x = -(B+\lambda I)^{-1}x = -(B-(-\lambda)I)^{-1}x = -\left(-\int_0^\infty e^{\lambda t} U(t)x\, dt\right) = \int_0^\infty e^{\lambda t} U(t)x\, dt,$$

hvormed

$$\{\lambda, \operatorname{Re}\lambda < 0\} \subset \rho(-B) = \rho(C).$$

På samme måde kan det vises at $\{\lambda, \operatorname{Re}\lambda < 0\} \subset \rho(B)$. Specielt har vi nu, at $\pm 1 \in \rho(B)$. Altså giver Sætning 2.4, at iB er selvadjungeret og dermed, at B er skævselvadjungeret. Derfor er Stones sætning vist. □

3.5 Perspektiv

I de foregående afsnit er det vist, hvordan der kan gives mening til et udtryk som $\exp(tB)$ når B er begrænset, og ikke mindst de mere interessante tilfælde hvor B er skævselvadjungeret eller opad halvbegrænset.

Men udtryk som $\exp(tB)u_0$, hvor $u_0 \in \mathcal{D}(B)$ er løsninger til Cauchy-problemet

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t) = Bu(t) \quad \text{og} \quad u(0) = u_0 \quad t \geq 0. \tag{3.22}$$

Denne type differentialligninger dukker op overalt i fysik og eksempler på disse ligningstyper er varmeledningsligningen

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\nabla^2 u(x,t), \quad k \text{ konstant}$$

hvor Laplaceoperatoren virker på de geometriske parametre gemt i vektoren x, samt Schrödingerligningen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = Hu(x,t),$$

hvor H er Hamiltonoperatoren, der giver et kvantemekanisk systems energi. Da H er selvadjungeret, er $-i/\hbar H$ skævselvadjungeret og Stones sætning giver, at $\exp(-i/\hbar Ht)$, $t \in \mathbb{R}$, er en én-parameterfamilie af unitære operatorer. Løsningerne til Schrödingerligningen givet fra semigruppeteorien, $u(x,t) = \exp(-i/\hbar Ht)u(x,0)$, har et meget abstrakt præg, som naturligvis vinder ved en grundigere analyse. Fx kan det ses, at i tilfældet med Schrödingerligningen, er løsningerne separeret i tid og sted. Det betyder at gruppen af unitære operatorer $\exp(-i/\hbar Ht)$, $t \in \mathbb{R}$ styrer tidsudviklingen i den kvantemekaniske tilstand $u_0 = u(x,0)$.

3.6 Konklusion

I starten af Kapitel 3 opstillede vi en trekant, der illustrerede indholdet af det kommende kapitel. Vi skulle undersøge sammenhængene mellem semigruppe, frembringer og resolvent af frembringer. Vi skal igen kaste et blik på trekanten, og se, hvordan teorien i kapitlet bindes nydeligt sammen.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{semigruppe}\\ \{G(t)\}_{t\geq 0}\end{array} \arrow[dl, shift left, "Bx = \lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)-I}{h}x"'] \arrow[dr, shift left, "(B-\lambda I)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)x\,dt"] & \\
\begin{array}{c}B\\ \text{frembringer}\end{array} \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left, "(B-\lambda I)^{-1}"] \arrow[r, phantom, "\begin{array}{c}\text{Hille–Yoshidas}\\ \text{sætning}\end{array}"] & & \begin{array}{c}(B-\lambda I)^{-1}_{\lambda\in\rho(B)}\\ \text{resolvent}\end{array} \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left, "B=\lambda I+((B-\lambda I)^{-1})^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

To af pilene er meget simple, og er givet direkte af definitionerne på infinitesimal frembringer og resolventen af den infinitesimale frembringer. Pilen fra resolvent til frembringer, er taget med for fuldstændighedens skyld. Sætning (3.6) fortæller os, hvordan vi kan komme direkte fra semigruppen til resolventen af den infinitesimale frembringer, når $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Hille–Yoshidas sætning tager os fra en tæt defineret, afsluttet operator, B i et Banachrum, med begrænset resolvent, til en semigruppe $\exp(tB)$, $t \geq 0$. Dermed giver Hille–Yoshidas sætning os de to inderste pile i diagrammet, og optræder derfor som krumtappen i teorien.

I de efterfølgende afsnit begrænsede vi behandlingen til Hilbertrum. Vi forsøgte at karakterisere den specielle mængde af stærkt kontinuerte grupper, der består af unitære operatorer. Det lykkedes med Stones klassiske resultat: En stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer er frembragt af en skævselvadjungeret operator, og enhver skævselvadjungeret operator frembringer en stærkt kontinuert unitær gruppe. Vi så også hvordan dette kunne bruges til at finde løsninger til helt abskrate differentialligninger.

A Appendices

A.1 Mere integration i Banachrum

Lemma A.1. *Lad $x : [\alpha, \beta] \to X$ være en stærkt differentiabel vektorfunktion, og $\varphi \in X^*$. Da er $\varphi \circ x$ stærkt differentiabel og*

$$(\varphi \circ x)'(t) = \varphi \circ x'(t)$$

Bevis. Da x er stærkt differentiabel så eksisterer grænseværdien af følgende differenskvotient, og er lig $x'(t)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t).$$

Af kontinuiteten af φ er

$$\varphi \circ x'(t) = \lim_{h \to 0} \varphi\Big(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\Big),$$

og fra lineariteten af φ er

$$\varphi \circ x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x(t+h)) - \varphi(x(t))}{h} = (\varphi \circ x)'(t)$$

hvor grænseværdien eksisterer fordi x er svagt differentiabel når den er stærkt differentiabel. □

Proposition A.2. *Når vektorfunktionen $x : I \to X$, $I \supset [\alpha, \beta]$ åben, er differentiabel med norm-kontinuert afledet $x'(t)$ gælder*

$$\int_\alpha^\beta x'(t)\, dt = x(\beta) - x(\alpha).$$

Bevis. Lad $\varphi \in X^*$. Da $\varphi : X \to \mathbb{C}$ gælder analysens anden fundamentalsætningen for $(\varphi \circ x)(t)$ fordi vi kan splitte dette integral op i real- og imaginærdel og bruge fundamentalsætningen i $\mathbb{R}$ på hvert led, og samle dem igen bagefter. Altså har vi

$$\int_\alpha^\beta (\varphi \circ x)'(t)\, dt = (\varphi \circ x)(\beta) - (\varphi \circ x)(\alpha) = \varphi \circ (x(\beta) - x(\alpha)).$$

Men pr. Lemma 1.4 og Lemma A.1 er $\varphi(\int_\alpha^\beta x'(t)\, dt) = \int_\alpha^\beta (\varphi \circ x)'(t)\, dt$. Da det duale rum til X adskiller punkter i X[1] og det ovenstående gælder for vilkårlige $\varphi \in X^*$, er

$$\int_\alpha^\beta x'(t)\, dt = x(\beta) - x(\alpha).$$

□

[1] Fra korollaret side 60 i Rudin [1973]

Proposition A.3. *Lad $x : I \to X$ være en norm-kontinuert vektorfunktion. Da gælder at, for $c \in I$ åben, og h så lille at $c + h \in I$, vil*

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)\,dt \to x(c) \quad \textit{for} \quad h \to 0.$$

Bevis. Da

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)\,dt - x(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t) - x(c)\,dt$$

er

$$\|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)\,dt - x(c)\| = \frac{1}{h}\|\int_c^{c+h} x(t) - x(c)\,dt\| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \|x(t) - x(c)\|\,dt.$$

Da x er norm-kontinuert på I og specielt norm-kontinuert i c, lader vi derfor $\varepsilon > 0$ være givet, og vælg, hvis ikke h allerede er det, h så lille, at $\|x(t)-x(c)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [c, c+h]$. Det betyder at

$$\|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)\,dt - x(c)\| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon,$$

hvormed det er vist, at

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)\,dt \to x(c) \quad \text{for} \quad h \to 0.$$

□

A.2 Symmetrisk ubegrænsede operatorer og deres nedre grænser

Proposition A.4. *Lad H være et Hilbertrum. En operator S er symmetrisk hvis og kun hvis $m(iS) = 0 = m(-iS)$.*

Bevis. Vi viser først at, hvis der for en operator S i et Hilbertrum, H, gælder at $m(iS) = 0 = m(-iS)$, så er S symmetrisk.

At $m(iS) = 0 = m(-iS)$ betyder at

$$\begin{aligned} 0 = -m(-iS) &= -\inf\{\operatorname{Re}\langle -iSx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(-iS), \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\operatorname{Re}\langle iSx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(S), \|x\| = 1\} \quad \text{og} \\ 0 = m(iS) &= \inf\{\operatorname{Re}\langle iSx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(S), \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

og derfor er alle elementer i $\{\operatorname{Re}\langle iSx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(S), \|x\| = 1\}$ 0. Af det får vi følgende ækvivalente udsagn

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\langle iSx, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(S), \|x\| = 1 \\ \Leftrightarrow\, &\operatorname{Re}\langle iSx, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(S) \\ \Leftrightarrow\, &\langle iSx, x\rangle \in i\mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}(S) \\ \Leftrightarrow\, &\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}(S). \end{aligned}$$

Altså har vi at hele den numeriske værdimængde $\nu(S) = \{\langle Sx, x\rangle : x \in \mathcal{D}(S)\}$ er en delmængde af $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis $m(-iS) = 0 = m(iS)$. Hvis vi nu kan vise, at S er symmetrisk hvis og kun hvis hele den numeriske værdimængde er reel, så er vi færdige.

Lad først og fremmest S være symmetrisk. Da gælder at

$$\langle Sx, x\rangle = \langle x, Sx\rangle = \overline{\langle Sx, x\rangle} \quad \forall x \in \mathcal{D}(S),$$

som betyder at $2i \operatorname{Im} \langle Sx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle - \overline{\langle Sx, x\rangle} = 0$, og $\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathcal{D}(S)$.

Lad det nu omvendt gælde at hele den numeriske værdimængde er reel. Dvs at

$$\langle Sx, x\rangle = \overline{\langle Sx, x\rangle} = \langle x, Sx\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(S).$$

Lad nu $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Det skal nu vises at S er symmetrisk. Det gøres ved at vise at

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Sx, y\rangle &= \operatorname{Re} \langle x, Sy\rangle \quad \text{og} \\ \operatorname{Im} \langle Sx, y\rangle &= \operatorname{Im} \langle x, Sy\rangle \,. \end{aligned}$$

Det hele hænger på følgende lighed

$$\begin{aligned} 0 &= \langle S(x+y), x+y\rangle - \langle x+y, S(x+y)\rangle \\ &= \langle Sx, y\rangle + \langle Sy, x\rangle - \langle x, Sy\rangle - \langle y, Sx\rangle \\ &= \langle Sx, y\rangle - \overline{\langle Sx, y\rangle} - (\langle x, Sy\rangle - \overline{\langle x, Sy\rangle}) \\ &= 2i \operatorname{Im}(\langle Sx, y\rangle - \langle x, Sy\rangle). \end{aligned}$$

Da gælder da også, at

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im}(\langle Six, y\rangle - \langle ix, Sy\rangle) \\ &= \operatorname{Im}(i(\langle Sx, y\rangle - \langle x, Sy\rangle)) \\ &= \operatorname{Re}(\langle Sx, y\rangle - \langle x, Sy\rangle). \end{aligned}$$

Dermed er det netop vist, at

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Sx, y\rangle &= \operatorname{Re} \langle x, Sy\rangle \\ \operatorname{Im} \langle Sx, y\rangle &= \operatorname{Im} \langle x, Sy\rangle \end{aligned}$$

hvormed $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ for alle $x, y \in \mathcal{D}(S)$, og $S \subset S^*$, der siger at S er symmetrisk.

□

A.3 Leibniz' formel

Proposition A.5. *Lad $\{G_1(t)\}_{t\geq 0}$ og $\{G_2(t)\}_{t\geq 0}$ være to semigrupper med infinitesimale frembringere hhv. B_1 og B_2. Da gælder at for $x \in \mathcal{D}(B_1) \cap \mathcal{D}(B_2)$ er*

$$\frac{d}{dt} G_1(t)G_2(t)x = G_1(t)B_1G_2(t)x + G_1(t)G_2(t)B_2x.$$

Bevis. Lad $x \in \mathcal{D}(B_1) \cap \mathcal{D}(B_2)$. For at vise formlen, må grænseværdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{G_1(t+h)G_2(t+h)x - G_1(t)G_2(t)x}{h}$$

undersøges.

Da

$$\begin{aligned}G_1(t+h)G_2(t+h)x - G_1(t)G_2(t)x + G_1(t+h)G_2(t)x - G_1(t+h)G_2(t)\\ = G_1(t+h)(G_2(t+h)x - G_2(t)x) + (G_1(t+h) - G_1(t))G_2(t)x\end{aligned}$$

er

$$\begin{aligned}&\frac{G_1(t+h)G_2(t+h)x - G_1(t)G_2(t)x}{h}\\ &= G_1(t+h)\frac{G_2(t+h)x - G_2(t)x}{h} + \frac{G_1(t+h) - G_1(t)}{h}G_2(t)x.\end{aligned}$$

Hvis der tages grænseværdi på begge sider af ligheden, fås

$$\frac{d}{dt}G_1(t)G_2(t)x = G_1(t)G_2(t)B_2x + G_1(t)B_1G_2(t)x,$$

hvor det er brugt, at grænseværdien gennem negative h findes på samme måde som gennem positive h. Dermed er det ønskede vist. □

A.4 Eksponentialoperatorer

Sætning A.6. *Lad A, B være begrænsede operatorer på et Banachrum og $t, s \in \mathbb{R}$. Da gælder at*

$$\exp(sA)\exp(tB) = \exp(sA + tB)$$

Bevis.

$$\exp(sA)\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(sA)^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tB)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(sA)^k}{k!}\frac{(tB)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Pr. Cauchy-multiplikation af to følger.

$$\begin{aligned}\exp(sA)\exp(tB) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(sA)^k(tB)^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(sA+tB)^n}{n!}\\ &= \exp(sA+tB)\end{aligned}$$

Pr. binomialformlen. □

Sætning A.7. *Lad B være en begrænset operator på et Banachrum og $t \in \mathbb{R}$. Da er operatorfamilien $\exp(tB)$ kontinuert i t med hensyn til operatornormen.*

Bevis. Lad først $s \geq t \geq 0$. Operatorfamilien $\exp(tB)$ er defineret som

$$\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!},$$

og derfor er

$$\begin{aligned}\|\exp(sB) - \exp(tB)\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n - t^n}{n!} B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s^n - t^n)}{n!} \|B\|^n \\ &= \exp(s\|B\|) - \exp(t\|B\|) \\ &= \exp(t\|B\|)(\exp((s-t)\|B\|) - I) \to 0 \quad \text{for} \quad s - t \to 0.\end{aligned}$$

Vi bruger nu Sætning A.6 og kontinuiteten fra højre til at give os kontinuiteten fra venstre:

$$\begin{aligned}\|\exp(-sB) - \exp(-tB)\| &= \|\exp(-tB)(\exp(tB) - \exp(sB))\exp(-sB)\| \\ &\leq \exp(|t|\,\|B\|)\exp(|s|\,\|B\|)\|\exp(tB) - \exp(sB)\| \\ &\to 0 \quad \text{for} \quad -s-(-t) \to 0.\end{aligned}$$

Dermed er operatorfamilien kontinuert i t med hensyn til operatornormen. $\square$

Litteratur

Gerd Grubb. *Moderne Analyse.* Københavns Universitet, 1984.

Peter D. Lax and Ralph S. Phillips. *Scattering Theory.* Academic Press, 1967.

Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups.* Springer, 2006.

Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional Analysis And Semi-groups*, volume XXXI of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, 1957.

Planetmath: Banach space valued analytic functions. URL `http://planetmath.org/encyclopedia/BanachSpaceValuedAnalyticFunctions.html`.

Jørgen Vesterstrøm. *Forelæsningsnoter til Analyse 1 - Emner fra klassiske Banachrum og harmonisk analyse.* Institut for matematiske fag, Aarhus Universitet, 6 edition, Marts 2004.

H. O. Cordes. *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras*, volume 76 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series.* Cambridge University Press, 1987.

Walter Rudin. *Functional Analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGrawHill, 2. edition, 1973.